

Zabawy z liczbami

Problem 1

Jaka jest największa liczba zapisana trzema cyframi 9?

Rozwiązanie

Jest to liczba 9^9 . Żeby sobie uzmystowić jak wielka jest to liczba, pokażemy parę obliczeń. Po pierwsze $9^9 = 387420489$ jest już dużą liczbą. Jeżeli podniesiemy 9 do tej potęgi, (czyli 9 pomnożymy 387420489 razy), otrzymamy liczbę ogromną. Policzono, że liczba ta składa się z 369692128 cyfr. Jeżeli przyjmiemy, że jedna zapisana cyfra ma 4 mm szerokości, do zapisania takiej liczby cyfr potrzebna jest wstęga papieru o długości 1478 km, 768 m i 51 cm. Gdybyśmy w ciągu jednej sekundy zapisywali jedną cyfrę i robili to, bez przerwy, przez 10 godzin na dobę zapisanie takiej ilości cyfr zajęłoby nam 28 lat, 42 dni, 2 godziny, 15 minut i 28 sekund¹. Pomimo ogromu tej liczby matematycy ustalili, że pierwszą jej cyfrą jest 2 a ostatnią 9. Zresztą o tym ostatnim fakcie bardzo łatwo można się przekonać. Zauważmy, że potęgując liczbę 9 otrzymujemy liczby z ostatnią cyfrą 9 lub 1 ($9^1 = 9, 9^2 = 81, 9^3 = 729$ itd.). Zauważmy przy tym, że dla potęg parzystych otrzymamy 1, dla potęg nieparzystych otrzymamy 9. Liczymy następująco:

$$9^9 = 9^{387420489}$$

Ponieważ 387420489 jest liczba nieparzysta, ostatnia potęga kończy się cyfrą 9.

Problem 2

- a) Jak napisać liczbę 0 wykorzystując trzy cyfry 5?
- b) Jak napisać liczbę 1 wykorzystując trzy cyfry 5?
- c) Jak napisać liczbę 2 wykorzystując trzy cyfry 5?
- d) Jak napisać liczbę 5 wykorzystując trzy cyfry 5?

Rozwiązanie

Można wskazać wiele rozwiązań, oto niektóre z nich:

a)

$$(5-5)^5 = 0^5 = 0, \quad 5 \cdot (5-5) = 5 \cdot 0 = 0, \quad \frac{5-5}{5} = \frac{0}{5} = 0,$$

b)

$$\left(\frac{5}{5}\right)^5 = 1^5 = 1, \quad \sqrt[5]{\frac{5}{5}} = \sqrt[5]{1} = 1, \quad 5^{5-5} = 5^0 = 1,$$

c)

$$\frac{5+5}{5} = \frac{10}{5} = 2,$$

d)

$$5+5-5, \quad 5 \cdot \frac{5}{5}, \quad 5^{\frac{5}{5}} = 5^1 = 5$$

¹ Proponujemy powtórzyć te obliczenia, pamiętając, że co czwarty rok jest przestępny.

Problem 3

Jak napisać liczbę 31 wykorzystując pięć cyfr 3?

Rozwiązanie

Podobnie jak w zadaniu poprzednim można wskazać kilka rozwiązań:

$$3^3 + 3 + \frac{3}{3} = 27 + 3 + 1 = 31$$

$$33 - 3 + \frac{3}{3} = 30 + 1 = 31$$

$$33 - \frac{3+3}{3} = 33 - 2 = 31$$

Problem 4

Istnieje prosty i szybki sposób podnoszenia liczb dwucyfrowych zakończonych cyfrą 5 do kwadratu. Aby to zrobić należy cyfrę dziesiątek pomnożyć przez liczbę o jeden większą i do wyniku dopisać 25. Dlaczego?

Przykład

$$35^2 = 3 \cdot 4 \dots 25 = 1225$$

Pomnożyliśmy 3 przez 4 i do wyniku dopisaliśmy 25.

$$85^2 = 8 \cdot 9 \dots 25 = 7225$$

Pomnożyliśmy 8 przez 9 i do wyniku dopisali 25.

Rozwiązanie

Łatwo pokazać skąd się bierze ta właściwość. Dowolną dwucyfrową liczbę zakończoną cyfrą 5 można zapisać tak:

$$10 \cdot a + 5$$

gdzie a oznacza cyfrę dziesiątek. Policzmy kwadrat tej liczby:

$$(10 \cdot a + 5)^2 = (10 \cdot a + 5)(10 \cdot a + 5) = 100 \cdot a^2 + 100 \cdot a + 25 = 100 \cdot [a \cdot (a + 1)] + 25$$

Mnożenie przez 100 oznacza dopisanie do wyniku dwóch zer. Teraz jest jasne, dlaczego cyfrę dziesiątek a mnożyliśmy przez liczbę o jeden większą ($a+1$) i do wyniku dopisywaliśmy 25.

Tę właściwość można wykorzystywać nie tylko dla liczb dwucyfrowych, wtedy jednak trudniej dokonywać działań w pamięci. Warto o tym wiedzieć przy działaniach pisemnych, bo uprości to wyliczenia. Na przykład:

$$105^2 = 10 \cdot 11 \dots 25 = 11025$$

Liczbę 10 pomnożyliśmy przez najbliższą większą od niej (11) i do wyniku dopisaliśmy 25.

$$125^2 = 12 \cdot 13 \dots 25 = 15625$$

Liczbę 12 pomnożyliśmy, przez 13 (co daje 156) i do wyniku dopisaliśmy 25.

Problem 5

Mnożenie przez 9 ma taką ciekawą własność, że suma cyfr wyniku jest liczbą podzielną przez 9. Wynika to z tzw. cechy podzielności, przez 9, która mówi, że:

Liczba dzieli się, przez 9 jeżeli suma jej cyfr dzieli się przez 9.

Aby uzasadnić cechę podzielności przez 9 rozpatrzmy liczbę abc , gdzie a , b , c są cyframi zapisu dziesiętnego tej liczby (litera a , b , c mogą oznaczać cyfry 0, 1, ..., 9). Wtedy mamy

$$abc = a \cdot 10^2 + b \cdot 10^1 + c \cdot 10^0 = a \cdot (99 + 1) + b \cdot (9 + 1) + c = [99a + 9b] + (a + b + c)$$

Po rozpisaniu liczby jak powyżej widać, że część w nawiasie kwadratowym z pewnością dzieli się przez 9, wobec tego, żeby liczba dzieliła się przez 9 potrzeba, aby suma w nawiasie zwykłym również dzieliła się przez 9. A to jest cecha podzielności, którą chcieliśmy uzasadnić. Zupełnie podobnie postępujemy z liczbami, które mają więcej niż trzy cyfry. Zauważmy przy okazji, że powyższy sposób uzasadnienia można zastosować również dla cechy podzielności przez 3:

Liczba jest podzielna, przez 3 jeżeli suma jej cyfr dzieli się przez 3.

Przykład 1

$$9 \cdot 1 = 9$$

$$9 \cdot 2 = 18, 1 + 8 = 9$$

$$9 \cdot 3 = 27, 2 + 7 = 9$$

$$9 \cdot 4 = 36, 3 + 6 = 9$$

$$9 \cdot 5 = 45, 4 + 5 = 9$$

$$9 \cdot 6 = 54, 5 + 4 = 9$$

$$9 \cdot 7 = 63, 6 + 3 = 9$$

$$9 \cdot 8 = 72, 7 + 2 = 9$$

$$9 \cdot 9 = 81, 8 + 1 = 9$$

...

$$9 \cdot 156 = 1404, 1 + 4 + 0 + 4 = 9$$

$$9 \cdot 157 = 1413, 1 + 4 + 1 + 3 = 9$$

$$9 \cdot 158 = 1422, 1 + 4 + 2 + 2 = 9$$

...

Przykład 2

$$3 \cdot 5 = 15, 1 + 5 = 6$$

$$3 \cdot 6 = 18, 1 + 8 = 9$$

$$3 \cdot 7 = 21, 2 + 1 = 3$$

Problem 6

Istnieje wiele tablic liczbowych związanych z mnożeniem liczb, które posiadają na tyle regularną budowę, że łatwo możemy je zapamiętać. Podamy parę przykładów:

$$0 \cdot 9 + 1 = 1$$

$$1 \cdot 9 + 2 = 11$$

$$12 \cdot 9 + 3 = 111$$

$$123 \cdot 9 + 4 = 1111$$

$$1234 \cdot 9 + 5 = 11111$$

$$12345 \cdot 9 + 6 = 111111$$

$$123456 \cdot 9 + 7 = 1111111$$

$$1234567 \cdot 9 + 8 = 11111111$$

$$12345678 \cdot 9 + 9 = 111111111$$

$$123456789 \cdot 9 + 10 = 1111111111$$

Zauważmy, że wszystkie występujące tu liczby posiadają regularną budowę. Mnożymy przez 9 liczbę złożoną z k kolejnych cyfr, do wyniku dodajemy k i w rezultacie otrzymujemy liczbę złożoną z k jedynek.

$$9 \cdot 9 + 7 = 88$$

$$98 \cdot 9 + 6 = 888$$

$$987 \cdot 9 + 5 = 8888$$

$$9876 \cdot 9 + 4 = 88888$$

$$98765 \cdot 9 + 3 = 888888$$

$$987654 \cdot 9 + 2 = 8888888$$

$$9876543 \cdot 9 + 1 = 88888888$$

$$98765432 \cdot 9 + 0 = 888888888$$

$$987654321 \cdot 9 - 1 = 8888888888$$

$$9876543210 \cdot 9 - 2 = 88888888888$$

W powyższej tablicy zwróćmy uwagę na dwie ostatnie linijki. Wydawać by się mogło, że regularność budowy tablicy w tych miejscach uległa zachwianiu. Przy głębszej analizie okazuje się, że regularność ta jest jeszcze mocniejsza przecież po 0 jest 1, następnie -2. Dlatego też w linijkach tych dodawaliśmy kolejne liczby z ciągu, w przedostatniej $+ (-1)$, w ostatniej $+ (-2)$. Można jeszcze w pierwszej linijce tablicy napisać: $0 \cdot 9 + 8 = 8$, nadal tablica będzie miała regularną budowę, ponieważ $09=9$, $098=98$, $0987=987$ itd. Uzupełnienie zapisu o linijkę „z obciętą cyfrą 9” jest jak najbardziej usprawiedliwione.

$$1 \cdot 8 + 1 = 9$$

$$12 \cdot 8 + 2 = 98$$

$$123 \cdot 8 + 3 = 987$$

$$1234 \cdot 8 + 4 = 9876$$

$$12345 \cdot 8 + 5 = 98765$$

$$123456 \cdot 8 + 6 = 987654$$

$$1234567 \cdot 8 + 7 = 9876543$$

$$12345678 \cdot 8 + 8 = 98765432$$

$$123456789 \cdot 8 + 9 = 987654321$$

W ostatniej tablicy z analogicznych powodów jak wcześniej można dodać pierwszą linię w postaci: $0 \cdot 8 + 0 = 0$.

Weźmy liczbę złożoną ze wszystkich cyfr za wyjątkiem 8, napisanych po kolei. Ma ona tę własność, że jeżeli pomnożymy ją przez 9 albo wielokrotności liczby 9 otrzymamy w wyniku liczbę złożoną z jednakowych cyfr.

$$12345679 \cdot 9 = 111111111$$

$$12345679 \cdot 18 = 222222222$$

$$12345679 \cdot 27 = 333333333$$

$$12345679 \cdot 36 = 444444444$$

$$12345679 \cdot 45 = 555555555$$

$$12345679 \cdot 54 = 666666666$$

$$12345679 \cdot 63 = 777777777$$

$$12345679 \cdot 72 = 888888888$$

$$12345679 \cdot 81 = 999999999$$

Zauważmy, że otrzymany wynik składa się z cyfry krotności dziewiątki, przez którą mnożono wyjściową liczbę. Liczba 12345679 daje również łatwy do zapamiętania wynik po pomnożeniu przez 8:

$$12345679 \cdot 8 = 98765432$$

Problem 7

Napiszmy liczbę dwucyfrową. Następnie napiszmy liczbę złożoną z tych samych cyfr, ale w odwrotnym porządku. Różnica napisanych liczb, większej i mniejszej, jest podzielna przez 9, a nawet jest równa iloczynowi 9 i różnicy cyfr większej z napisanych liczby. Dlaczego?

Przykład

$$72 - 27 = 45 = 5 \cdot 9 = (7 - 2) \cdot 9$$

$$92 - 29 = 63 = 7 \cdot 9 = (9 - 2) \cdot 9$$

$$63 - 36 = 27 = 3 \cdot 9 = (6 - 3) \cdot 9$$

Rozwiązanie

Napisaną przez nas liczbę dwucyfrową oznaczmy ab , gdzie a i b są dowolnymi cyframi (oczywiście $a \neq 0$). Zgodnie z warunkami zadania mamy:

$$ab - ba = (10a + b) - (10b + a) = 9a - 9b = 9 \cdot (a - b)$$

Tajemnica tej ciekawej własności została, więc wyjaśniona. Gdyby $a = 0$ rozpatrywana liczba dwucyfrowa redukowalaby się do liczby jednocyfrowej b , mielibyśmy $b0 - b = 9b$ (od większej odejmujemy mniejszą) i teraz też różnica dzieli się przez 9 dając iloraz b . Ten sposób uzasadnienia własności można rozszerzyć na liczby mające więcej niż dwie cyfry. Przykładowo weźmy liczbę 5732, otrzymamy: $5732 - 2375 = 3357$, $3 + 3 + 5 + 7 = 18$. Zatem różnica dzieli się przez 9.

Zadanie to można przedstawić w postaci szarady matematycznej. Niech ktoś wybierze w pamięci liczbę dwucyfrową. Po przestawieniu jej cyfr, niech od liczby większej odejme liczbę mniejszą i powie nam jedną cyfrę z wyniku. Wtedy my, natychmiast podajemy drugą cyfrę, którą będzie dopełnienie podanej cyfry do 9 (różnica: $9 - \text{podana cyfra}$).

Przykład

Kolega wybrał w pamięci 36. Po przestawieniu cyfr otrzymał 63. Policzył różnicę:

$$63 - 36 = 27$$

i mówi nam 7. My natychmiast podajemy 2.

Jak pokazano wyżej, różnica dzieli się przez 9. Skoro tak, to suma jej cyfr dzieli się przez 9 (cecha podzielności² liczby przez 9). Ponieważ największą możliwą różnicą spełniającą warunki zadania jest $91 - 19 = 72$. Suma cyfr nie tylko dzieli się, przez 9 ale i wynosi 9, dlatego tak łatwo możemy podać drugą cyfrę różnicy.

Problem 8

Zadanie podobne do poprzedniego. Weźmy liczbę złożoną z trzech cyfr, ale taką, żeby cyfry pierwsza i trzecia były różne. Następnie przestawmy cyfrę pierwszą z trzecią i policzmy różnicę tak otrzymanych liczb. Okazuje się, że różnica tych liczb zawsze dzieli się przez 9 a otrzymany iloraz dzieli się przez 11. Dlaczego tak się dzieje?

Przykład

Weźmy liczbę 845, po przestawieniu cyfr otrzymamy 548. Różnica tych liczb wynosi: $845 - 458 = 297$. Mamy ponadto $297 : 9 = 33 = 3 \cdot 11$.

Rozwiązanie

Oznaczmy trzy kolejne cyfry liczby przez a, b, c i policzmy różnicę:

$$abc - cba = 100a + 10b + c - 100c - 10b - a = 99a - 99c = 99 \cdot (a - c)$$

Ostatnia liczba dzieli się przez 9 a otrzymany iloraz dzieli się przez 11:

$$\frac{99 \cdot (a - c)}{9} = 11 \cdot (a - c)$$

² Łatwo zauważyć, że dla iloczynu małych liczb i liczby 9 nie tylko suma cyfr iloczynu dzieli się, przez 9 ale nawet jest równa 9 np. $7 \cdot 9 = 63$, $6 + 3 = 9$

Problem 9 (Ciekawe kwadraty)

Bardzo ciekawe jest zestawienie kwadratów liczb złożonych z samych jedynek, oto ono:

$$1^2 = 1$$

$$11^2 = 121$$

$$111^2 = 12321$$

$$1111^2 = 1234321$$

$$11111^2 = 123454321$$

$$111111^2 = 12345654321$$

$$1111111^2 = 1234567654321$$

$$11111111^2 = 123456787654321$$

$$111111111^2 = 12345678987654321$$

Łatwo jest uzasadnić ten zapis bez posługiwania się skomplikowanym potęgowaniem dużych liczb. Dla przykładu rozważmy kwadrat liczby 11111. Ponieważ kwadrat oznacza mnożenie liczby przez siebie, zapiszmy to w postaci pisemnej:

$$\begin{array}{r} 11111 \\ \times 11111 \\ \hline 11111 \\ 11111 \\ 11111 \\ 11111 \\ 11111 \\ + 11111 \\ \hline 123454321 \end{array}$$

Analizując ten zapis widzimy, że mnożenie „przez każdą jedynkę” to „przesunięcie liczby o jedną pozycję w lewo”. Ponieważ wykonaliśmy 5 mnożeń, powstała kolumna złożona z 5 liczb odpowiednio przesuniętych w lewo. Każda liczba składa się z samych jedynek, dlatego sumując kolumnę w środkowej pozycji otrzymamy 5 i idąc od tej pozycji na prawo i na lewo na następnej pozycji suma zostanie o jeden zmniejszona stąd wokół 5 będą cyfry 4, następnie 3, itd.

Liczby stojące po prawej stronie mają ponadto ciekawą własność. Suma ich cyfr równa jest kwadratowi ilości cyfr liczby potęgowanej złożonej z jedynek Rzeczywiście:

$$1^2 = 1$$

$$2^2 = 1 + 2 + 1$$

$$3^2 = 1 + 2 + 3 + 2 + 1$$

$$4^2 = 1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1$$

$$5^2 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$$

$$6^2 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$$

$$7^2 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$$

$$8^2 = 1+2+3+4+5+6+7+8+7+6+5+4+3+2+1$$

$$9^2 = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+8+7+6+5+4+3+2+1$$

To nie koniec zaskakujących właściwości potęgi liczb złożonych z jedynek. Dają się one przedstawiać w postaci ciekawych ułamków:

$$1 = \frac{1^2}{1}$$

$$121 = \frac{22^2}{1+2+1}$$

$$12321 = \frac{333^2}{1+2+3+2+1}$$

$$1234321 = \frac{4444^2}{1+2+3+4+3+2+1}$$

$$123454321 = \frac{55555^2}{1+2+3+4+5+4+3+2+1}$$

$$12345654321 = \frac{666666^2}{1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1}$$

$$1234567654321 = \frac{7777777^2}{1+2+3+4+5+6+7+6+5+4+3+2+1}$$

$$123456787654321 = \frac{88888888^2}{1+2+3+4+5+6+7+8+7+6+5+4+3+2+1}$$

$$12345678987654321 = \frac{999999999^2}{1+2+3+4+5+6+7+8+9+8+7+6+5+4+3+2+1}$$

Ostatnie zestawienie ułamków bardzo łatwo uzasadnić bez żmudnych i skomplikowanych rachunków. Weźmy na przykład liczbę 12345654321. Już wiemy, że zachodzi równość:

$$6^2 = 1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1$$

Po podstawieniu jej w miejsce mianownika w ostatnim zestawieniu ułamków, otrzymamy:

$$12345654321 = \frac{666666^2}{1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1} = \frac{666666^2}{6^2} = \left(\frac{666666}{6} \right)^2 = 111111^2$$

Problem 10 (O liczbie 37)

Liczba 37 ma szereg ciekawych i niespodziewanych własności. Mnożona przez 3 (lub krotności trzech aż do $3 \cdot 9 = 27$) daje w wyniku liczby złożone z takich samych cyfr, które wskazują na krotność liczby 3:

$$37 \cdot 3 \cdot 1 = 111$$

$$37 \cdot 3 \cdot 2 = 222$$

$$37 \cdot 3 \cdot 3 = 333$$

$$37 \cdot 3 \cdot 4 = 444$$

$$37 \cdot 3 \cdot 5 = 555$$

$$37 \cdot 3 \cdot 6 = 666$$

$$37 \cdot 3 \cdot 7 = 777$$

$$37 \cdot 3 \cdot 8 = 888$$

$$37 \cdot 3 \cdot 9 = 999$$

Pomnożona przez sumę swoich cyfr równa jest sumie sześciątów swoich cyfr:

$$37 \cdot (3 + 7) = 3^3 + 7^3 = 370$$

Jeżeli weźmiemy sumę kwadratów jej cyfr i odejmiemy od tego iloczyn jej cyfr, to otrzymamy ją samą:

$$3^2 + 7^2 - 3 \cdot 7 = 37$$

Najciekawszą własnością jest to, że dla niektórych jej krotności, po cyklicznym przestawieniu cyfr (pierwsza cyfra na koniec, itd.) uzyskuje się kolejne jej krotności:

$$259 = 7 \cdot 37$$

$$592 = 16 \cdot 37$$

$$925 = 25 \cdot 37$$

Inne krotności liczby 37, które posiadają tę własność to: 185, 851, 518 oraz 296, 962, 629.

Podobną własność ma liczba 41, której krotność 17589 po cyklicznym przestawieniu cyfr nadal pozostaje jej krotnością:

$$17589 = 429 \cdot 41$$

$$75891 = 1851 \cdot 41$$

$$58917 = 1437 \cdot 41$$

$$89175 = 2175 \cdot 41$$

$$91758 = 2238 \cdot 41$$

Problem 11

Niżej wypisane pary kolejnych liczb mają tę własność, że każda z liczb podniesiona do kwadratu da wynik zapisany takimi samymi cyframi.

$$13^2 = 169$$

$$157^2 = 24649$$

$$913^2 = 833569$$

$$14^2 = 196$$

$$158^2 = 24964$$

$$914^2 = 835396$$

Nieco bardziej skomplikowane jest podnoszenie do trzeciej potęgi. Można wskazać liczby, których sześciaty zapisywane są takimi samymi cyframi, jednak nie są to kolejne liczby.

$$345^3 = 41063625$$

$$331^3 = 36264691$$

$$384^3 = 56623104$$

$$406^3 = 66923416$$

$$405^3 = 66430125$$

Kolejne liczby charakteryzują się tą osobliwością, że ich kwadraty zapisuje się tymi samymi cyframi oraz kwadraty-kwadratów, (czyli 4 potęgę) również zapisuje się tymi samymi cyframi.

$32^2 = 1024$
 $49^2 = 2401$

$32^4 = 1048576$
 $49^4 = 5764801$

Problem 12

Liczby 1375, 1376, 1377 są najmniejszymi kolejnymi liczbami naturalnymi, które dzielą się przez sześćiany innych liczb naturalnych:

$1375 : 5^3 = 11$
 $1376 : 2^3 = 172$
 $1377 : 3^3 = 51$

Problem 13

Weźmy 9 różnych cyfr (bez cyfry 0). Pokażemy teraz liczby zapisane przy pomocy tych wszystkich cyfr, które są kwadratami innych liczb. A może czytelnik zechce samodzielnie odnaleźć takie liczby i porównać z poniższą tablicą?

$11826^2 = 139854276$	$23439^2 = 549386721$
$12363^2 = 152843769$	$24237^2 = 587432169$
$12543^2 = 157326849$	$24276^2 = 589324176$
$14676^2 = 215384976$	$24441^2 = 597362481$
$15681^2 = 245893761$	$24807^2 = 615387249$
$15963^2 = 254817369$	$25059^2 = 627953481$
$18072^2 = 326597184$	$25572^2 = 653927184$
$19023^2 = 361874529$	$25941^2 = 672935481$
$19377^2 = 375468129$	$26409^2 = 697435281$
$19569^2 = 382945761$	$26733^2 = 714653289$
$19629^2 = 385297641$	$27129^2 = 735982641$
$20316^2 = 412739856$	$27273^2 = 743816529$
$22887^2 = 523814769$	$29034^2 = 842973156$
$23019^2 = 529874361$	$29106^2 = 847159236$
$23178^2 = 537219684$	$30384^2 = 923187456$

Teraz weźmy wszystkie cyfry (od 0 do 9) i zapytajmy o liczby, które podniesione do kwadratu dadzą się zapisać wszystkimi cyframi.

$32043^2 = 1026753849$	$45624^2 = 2081549376$
$32284^2 = 1042385796$	$55446^2 = 3074258916$
$33144^2 = 1098524736$	$68763^2 = 4728350169$
$35172^2 = 1237069584$	$83919^2 = 7042398561$
$39147^2 = 1532487609$	$99066^2 = 9814072356$

Problem 14

Liczba 123456789 w zapisie, której występują po kolei wszystkie cyfry za wyjątkiem 0, ma kilka interesujących własności. Jeżeli pomnożymy ją przez jednocyfrową liczbą różną od wielokrotności 3, to wynik również zawierał będzie wszystkie cyfry za wyjątkiem 0.

$$123456789 \cdot 1 = 123456789$$

$$123456789 \cdot 2 = 246913578$$

$$123456789 \cdot 4 = 493827156$$

$$123456789 \cdot 5 = 617283945$$

$$123456789 \cdot 7 = 864197523$$

$$123456789 \cdot 8 = 987654312$$

Zwróćmy zwłaszcza uwagę na ostatni iloczyn, który ma bardzo regularną postać i tylko dwie ostatnie pozycje tę regularność burzą. Ciekawe są też suma oraz różnica tej liczby i liczby 123456789:

$$\begin{array}{r} 123456789 \\ + 987654321 \\ \hline 1111111110 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 987654321 \\ - 123456789 \\ \hline 864197532 \end{array}$$

Suma ma bardzo regularną budowę a wszystkie liczby w różnicy składają się z dziewięciu różnych cyfr.