

Odgadywanie liczb

Przykład

Wyberzmy 845. Mamy zatem $845 - 548 = 297 = 9 \cdot 33 = 9 \cdot (8 - 5) \cdot 11$

Rozwiązanie

Niech wybrana przez nas liczba równa się abc gdzie a, b, c , mogą przyjmować wartości od 0 do 9 (oczywiście $a \neq 0$). Na podstawie warunków zadania mamy:

$$abc - cba = 100a + 10b + c - (100c + 10b + a) = 99a - 99c = 99(a - c) = 9 \cdot (a - c) \cdot 11$$

Ostatnia równość wyjaśnia dlaczego różnica dzieli się przez dziewięć dając iloraz równy iloczynowi 11 i różnicy odpowiednich cyfr wybranej liczby.

Z powyższego zadania dość łatwo uczynić ciekawą szaradę matematyczną. Napiszmy na kartce liczbę 1089, włóżmy kartkę do koperty i zaklejmy. Niech teraz ktoś, komu chcemy pokazać tę szaradę weźmie kopertę i napisze na niej dowolną trzycyfrową liczbę, w której cyfra setek jest przynajmniej o 2 większa od cyfry jedności. Niech odejmie od tej liczby liczbę powstałą przez przestawienie cyfr setek i jedności. Do wyniku niech doda liczbę powstałą z wyniku po przestawieniu cyfr setek i jedności. Teraz prosimy o otwarcie koperty. Ktoś kto wykonywał przed momentem rachunki zdziwi się, że jego końcowy wynik 1089 znajduje się napisany na kartce.

Przykład

Kolega wziął zaklejoną kopertę i napisał liczbę 572. Wykonuje obliczenia:

$$572 - 275 = 297 \qquad 297 + 792 = 1089$$

Rzeczywiście, w na kartce zapisano liczbę 1089.

Problem 2

Niech kolega wybierze w pamięci liczbę trzycyfrową. Następnie podzieli tę liczbę przez 9 i poda resztę z tego dzielenia, nazwijmy ją pierwszą resztą. Niech teraz kolega w wybranej liczbie skreśli dowolną cyfrę (za wyjątkiem 0). Otrzymałą w ten sposób liczbę dwucyfrową niech podzieli przez 9 i poda resztę z tego dzielenia, nazwiemy ją drugą resztą. Różnica reszty pierwszej i drugiej wskaże skreśloną cyfrę. Jeżeli pierwsza reszta będzie mniejsza od drugiej należy zwiększyć ją o 9 i po tym obliczyć różnicę.

Przykład

Kolega wybrał w myślach liczbę 325. Liczy $325 \div 9 = 36$ r.1. Kolega podał resztę 1. Skreśla cyfrę 5 i liczy dalej: $32 \div 9 = 3$ r.5, po czym podaje drugą resztę 5. Do pierwszej reszty dodajemy 9 i odejmujemy drugą resztę: $(1 + 9) - 5 = 5$. Różnica wskazała skreśloną cyfrę.

Kolega wybrał w myślach liczbę 727. Liczy $727 \div 9 = 80$ r.7. Podaje pierwszą resztę 7. Skreśla cyfrę 2 i liczy dalej: $77 \div 9 = 8$ r.5. Podaje drugą resztę 5. Obliczamy różnicę $7 - 5 = 2$. Wynik wskazuje skreśloną cyfrę.

Rozwiązanie

Oznaczmy wybraną w myślach liczbę przez abc gdzie a, b, c mogą przyjmować wartości od 0 do 9 (należy pamiętać, że $a \neq 0$). Możemy więc napisać:

$$abc = 100a + 10b + c = [99a + 9b] + (a + b + c)$$

Składnik w nawiasie kwadratowym zawsze dzieli się przez 9. Dlatego składnik w nawiasie zwykłym przy podzieleniu przez 9 daje resztę r_1 . Stąd wynika, że:

$$(*) \quad a + b + c = k \cdot 9 + r_1$$

Przy czym k nie może być większe niż 2 (ponieważ maksymalna suma trzech cyfr niepodzielna przez 9 to $9 + 9 + 8 = 26$). Załóżmy, że skreślono cyfrę c . Dla liczby ab mamy analogiczny rozkład:

$$ab = 10a + b = 9a + (a + b)$$

Pierwszy składnik rozkładu oczywiście dzieli się przez 9, dlatego druga reszta pochodzi z dzielenia sumy w nawiasie zwykłym. Mamy więc:

$$(**) \quad a + b = l \cdot 9 + r_2$$

Przy czym l równe jest 1 (ponieważ maksymalna suma dwu cyfr niepodzielna przez 9 to $9 + 8 = 17$). Przekształcając $(*)$ i podstawiając $(**)$ otrzymamy:

$$c = k \cdot 9 + r_1 - (a + b) = k \cdot 9 + r_1 - l \cdot 9 - r_2 = (k - l) \cdot 9 + (r_1 - r_2)$$

Przy czym różnica $k - l$ równa jest 0 (dla $k = 1, l = 1$) lub 1 (dla $k = 2, l = 1$) w ostatnim przypadku liczba 9 zwiększa pierwszą resztę.