

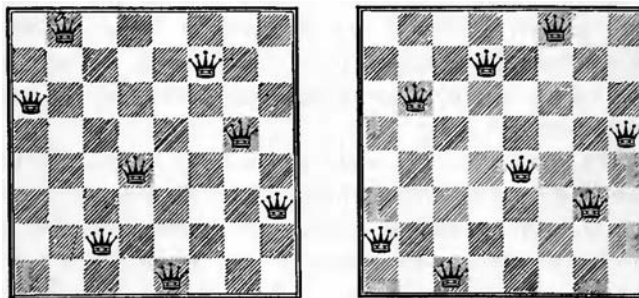
Matematyka na szachownicy

Legenda głosi, że pewien sułtan tak bardzo szachy pokochał iż wynalazcy tej gry, braminowi Sissa Nassir obiecał każdą nagrodę, której zażąda. Ten jednak nie chciał ani złota ani drogich kamieni. Poprosił sułtana, żeby dał mu troszeczkę pszenicy... Na pierwszym polu szachownicy jedno ziarenko, na drugim polu dwa ziarenka, na polu trzecim cztery ziarenka, itd. aż do ostatniego pola o numerze 64. Czy sułtana stać było na taką skromną zapłatę¹?

Problem 1 (Problem ośmiu hetmanów)

Na szachownicy rozstawić 8 hetmanów, w taki sposób, żeby żaden nie bił innego. W sformułowaniu matematycznym można to zadanie opisać tak: W kwadracie złożonym, z 64 pól (szachownica), zaznaczyć 8 pól, w taki sposób aby żadne dwa zaznaczone pola nie leżały w tej samej linii, w tej samej kolumnie i na tej samej linii równoległej do którejś z przekątnych.

Powyższe zadanie postawił w 1848 r. mistrz szachowy Max Bezzel. Dwa lata później rozwiązał go matematyk niemiecki Franz Nauck. Problemem zajmował się także Carl Friedrich Gauss. Zadanie odkryto ponownie w związku z rozwojem informatyki. Współcześnie należy do kanonu zadań ćwiczących pisanie algorytmów. Przykładowe rozwiązania pokazuje poniższy rysunek.

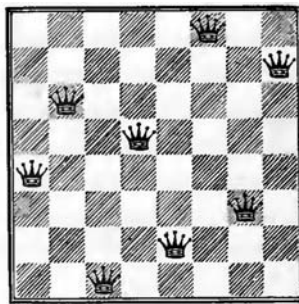
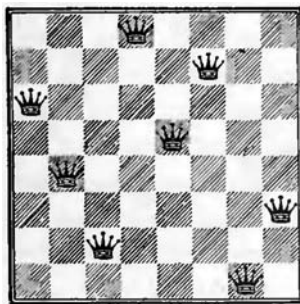


Każde z rozwiązań da się opisać układem 8 liczb, gdzie liczba k oznacza nr linii (licząc oczywiście jak w szachach), w której stoi hetman. Lewe rozwiązanie z rysunku to układ (68241753), prawe układ (26174835).

Lewe i prawe rozwiązanie są w pewien sposób powiązane. Prawe powstaje z lewego przy obrocie szachownicy o kąt prosty (mówiąc obrazowo, przy położeniu szachownicy na lewy bok). Zauważmy, że kładąc szachownicę na lewy bok linie stają się kolumnami ale w odwrotnym porządku (linia 7 przejdzie w kolumnę 2). Kolumny stają się liniami w zwykłym porządku (kolumna 3 przejdzie na linię 3). Stąd wynika, że mając jedno rozwiązanie np. lewe (68241753), możemy wypisać drugie rozwiązanie (prawe).

Aby ustalić jaka liczba będzie na pierwszym miejscu, szukamy liczby 8 (porządek odwrotny). Liczba 8 stoi w 2 kolumnie, czyli na pierwszym miejscu będzie 2. Aby ustalić co będzie na drugim miejscu szukamy liczby 7. Liczba 7 stoi w 6 kolumnie, czyli na drugim miejscu będzie 6. Aby ustalić co będzie na trzecim miejscu szukamy liczby 6. Liczba 6 stoi w pierwszej kolumnie, więc na trzecim miejscu będzie 1. Rozumując tak dalej dochodzimy do układu liczb (26174835).

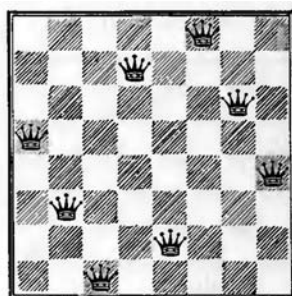
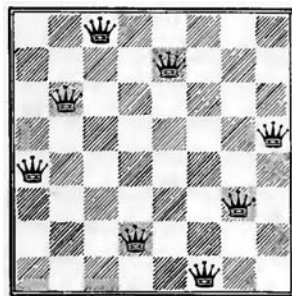
¹ Jeżeli ktoś uparty zechce to policzyć, otrzyma liczbę 18 446 774 073 709 551 615 ziaren, chyba żadnego sułtana nie stać na taką rozrzutność.



Ponieważ kwadrat można „położyć” na każdym boku, obracając po raz kolejny o kąt prosty i raz jeszcze o kąt prosty otrzymamy następne rozwiązania powiązane z pierwszym. Reprezentację liczbową rozwiązania trzeciego można znaleźć przekształcając rozwiązanie drugie. Jako trzecie rozwiązanie uzyskujemy układ (64285713). Czwarte rozwiązanie znajdziemy przekształcając trzecie, będzie nim układ (46152837).

Podkreślmy, że nie zwracaliśmy uwagi na zmianę barw pól szachownicy. Uważny obserwator zauważy, że kładąc szachownicę na lewy bok pola czarne przeszły na pola białe i odwrotnie, co w niczym nie wpływa na szukanie rozwiązań, interesuje nas rozkład hetmanów a nie kolorów pól.

Istnieją takie rozkłady, które przy drugim obrocie przechodzą w wyjściowe. Innymi słowy z takiego rozwiązania nie otrzymamy 4 lecz tylko 2. Przykładem może być układ hetmanów z rysunków poniżej.



Sytuację po lewej stronie rysunku opisuje układ liczb (46827135). Kładąc szachownicę na lewym boku otrzymamy układ (35281746). Kładąc szachownicę na lewym boku raz jeszcze otrzymamy (46827135), więc wróciliśmy do rozwiązania pierwszego.

Na rysunku po prawej stronie rozkład ma opis (53172864). Drugim rozwiązaniem pozyskanym z tego rozkładu będzie (64718253). Przy trzecim obrocie wracamy do punktu wyjścia (53172864).

Można zapytać czy są rozkłady hetmanów, które przy obrocie nie dają kolejnych rozwiązań. Dla szachownicy z 64 polami takich rozkładów nie ma.

Jeżeli weźmiemy dowolne rozwiązanie problemu 8 hetmanów, to oprócz obrotów również symetrie prowadzą do kolejnych rozwiązań. Aby się o tym przekonać wystarczy szachownicę z ustawionym rozwiązaniem obejrzeć w lustrze. Zobaczymy w ten sposób kolejne rozwiązanie, którego obroty nie ujawniały. Dla przykładu weźmy rozkład hetmanów już rozważany (46827135). Pamiętamy, że prowadził on przez obrót do rozkładu (35281746). Jeżeli jednak „odbijemy” go w lustrze, dostaniemy kolejne rozwiązania. Przy odbiciu względem lewego boku (1 przejdzie na 8 i odwrotnie, linie nie ulegną zmianie), otrzymamy z powyższych dwa

kolejne rozwiązania (53172864), (64718253). Zauważmy, że odbijając względem podstawy (linia 1 na linię 8, kolumny stałe) dojdziemy do tych samych rozwiązań.

Rozkłady hetmanów, z których obrotem lub symetrią uzyskujemy inne rozkłady nazywamy podstawowymi. Dowodzi się, że układów podstawowych jest 12, z czego 11 możemy obracać czterokrotnie, odbijać 2 krotnie, co razem daje 88 możliwych rozkładów. Jeden rozkład można obracać dwukrotnie i odbijać dwukrotnie, co razem daje 4 możliwości. Wszystkich rozwiązań problemu 8 hetmanów jest zatem 92. Poniżej pokazujemy wszystkie rozwiązania podstawowe.

(72631485)	(46152837)	(48157263)
(61528374)	(57263148)	(51468237)
(58417263)	(16837425)	(42751863)
(35841726)	(57263184)	(35281746)

W paru słowach opiszemy jeszcze algorytm pozyskiwania rozwiązań stosowany w informatyce. Stawiamy pierwszego hetmana w lewym dolnym rogu. Drugiego hetmana stawiamy w najbliższej kolumnie następnej linii (kolumna 3, linia 2). Trzeciego hetmana stawiamy w najbliższej kolumnie następnej linii (względem ostatnio ustawionego hetmana) itd. Jeżeli dojdziemy do prawej krawędzi, następnego hetmana stawiamy na odpowiednim poziomie w pierwszej kolumnie. Po znalezieniu ustawień dla 8 hetmanów przesuwamy pierwszego w prawo i rozpoczynamy od początku. Po dojściu pierwszego hetmana do prawej krawędzi, przesuwamy go o jedną linię do góry i rozpoczynamy ustawianie od pierwszej kolumny. Zauważmy, że wiele rozwiązań pozyskanych w ten sposób będzie się powtarzać. Dlatego układy powtarzające się należy eliminować (które?). Znającym elementy programowania proponujemy przełożenie tego algorytmu na język komputerowy.

Problem 2 (*O ruchu skoczka*)

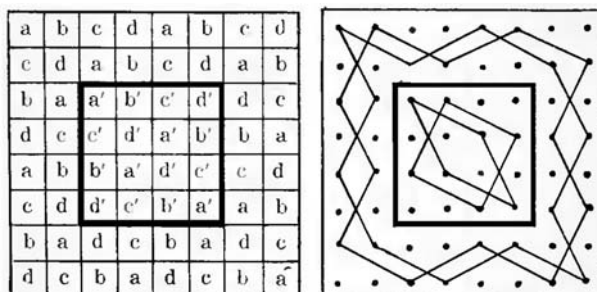
W jaki sposób obejść skoczkiem wszystkie pola szachownicy, przy czym na każdym polu być tylko jeden raz i wrócić do punktu wyjścia?

Zadaniem tym zajmował się między innymi słynny matematyk szwajcarski Leonard Euler. W liście Christiana Goldbach z 26 czerwca 1756 r. podał jeden z przypadków rozwiązań. Przypadek ten dotyczył takich ruchów skoczkiem, które rozpoczynają się w rogu szachownicy (oczywiście wystarczy uwzględnić jeden róg, bo pozostałe uzyskamy poprzez obrót). Poniżej pokazujemy jedno z możliwych rozwiązań Eulera. Kolejne ruchy numerowane są kolejnymi liczbami.

54	49	40	35	56	47	42	33
39	36	55	48	41	34	59	46
50	53	38	57	62	45	32	43
37	12	29	52	31	58	19	60
28	51	26	63	20	61	44	5
11	64	13	30	25	6	21	18
14	27	2	9	16	23	4	7
1	10	15	24	3	8	17	22

Euler uzyskiwał rozwiązania zakrywając pola na których stanął skoczek monetami. Zadanie to w literaturze nazywa się problemem szachowym Eulera. Spróbujmy podać metodę jego rozwiązania.

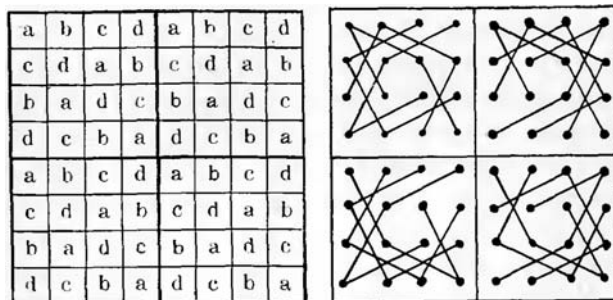
Podzielmy szachownicę na dwa obszary. Środkowy składający się z 16 pól oraz brzegowy składający się 48 pól. Wypełnijmy pola obszaru brzegowego literami *abcd* (jak pokazano na rysunku poniżej) w taki sposób, że litery *a* znajdują się na polach obszaru, które zajmie skoczek wychodząc z pierwszego pola *a* (lewy górny róg). Litery *b* znajdują się na tych polach obszaru, które zajmuje skoczek wychodzący z pierwszego pola *b* itd.



W podobny sposób wypełnijmy obszar środkowy literami *a'b'c'd'*. Na schemacie po prawej stronie pokazano dwie możliwe drogi skoczka po obszarze zewnętrznym (krzywa łamana) i dwie możliwe drogi po obszarze wewnętrznym (kwadrat i romb). Zauważmy, że drogi te są zamknięte (skoczek będzie chodził w kółko). Zauważmy ponadto, że z pewnych pozycji na drodze w obszarze zewnętrznym skoczek może przeskoczyć na drogę do obszaru wewnętrznego i na odwrót. Podobnie można przechodzić z jednej drogi obszaru na drugą drogę tego samego obszaru.

Obserwacje te nasuwają następujący sposób rozwiązania problemu. Rozpoczynamy ruch skoczka od któregoś z pól na zewnętrznych liniach szachownicy (np. lewy górny róg). Przechodzimy pełną drogę zewnętrzną (linia łamana). Przeskakujemy do obszaru wewnętrznego. Przechodzimy pełną drogę wewnętrzną (romb lub kwadrat). Przeskakujemy ponownie na obszar zewnętrzny ale już na inną łamaną itd. aż obejdziemy 64 pola.

Można do problemu podejść inaczej. Podzielmy szachownicę na cztery kwadratowe obszary po 16 pól. Tak jak poprzednio wypełniamy każdy obszar literami *abcd*, które pokazują kolejne etapy drogi skoczka w ramach danego obszaru.



Juz wiemy, że w ramach obszaru 16 pól skoczek porusza się po kwadratach lub rombach. Widać zarazem, że możliwe są przejścia między drogami w ramach ćwiartki szachownicy, jak

i między różnymi ćwiartkami. Wobec czego zamiast zajmować się trudniejszym problemem na 64 polach szachownicy, rozbijamy go na łatwiejszy problem, gdyż tylko na 16 polach czwartej części szachownicy.