

I. Łamigłównki i żarty.

Każde z zadań w tym rozdziale da się rozwiązać bez wzorów i twierdzeń matematycznych. Nie oznacza to jednak, że brak jest w tych przykładach matematyki. Precyzyjne logiczne myślenie, które leży u podstaw matematyki jest nieodzowne przy rozwiązywaniu tych zadań. Oprócz logiki przydaje się także odrobina sprytu i spostrzegawczości.

Pierwszych 5 zadań są to przeprawy albo zadania przewozowe pojawiły się po raz pierwszy w pismach mnicha angielskiego **Alkuina** (730–804), który tworzył po łacinie. Zajmował się filozofią, pedagogiką, teologią i teorią muzyki. Pisał także utwory wierszowane. Napisał bodajże pierwszy w historii zbiór łamigłówek logicznych *Propositiones ad acuendos iuvenes*, z którego to zbioru pochodzą te najbardziej znane opisane w zadaniach 1, 2, 3.

1. Wieśniak wraca z targu, gdzie kupił wilka, kozę i kapustę. Po drodze musi przeprowadzić się przez rzekę. Łódź jest niewielka i oprócz chłopca może pomieścić tylko jedną z zakupionych rzeczy. Nie można zostawić kozy i kapusty albo wilka i kozę bez opieki. W jaki sposób dokonać przeprawy przez rzekę?

Rozwiązanie

Istnieje kilka możliwości jedną z nich jest następująca.

Wieśniak przewozi kozę. Na brzegu pozostaje bezpieczna para wilk i kapusta. Po pozostawieniu kozy wraca i zabiera wilka (drugi wariant kapustę). Po przewiezieniu wilka zabiera ponownie kozę, pozostawia ją na brzegu i przewodzi do wilka kapustę. Następnie wraca po kozę i przeprowadza się na drugi brzeg.

2. Trzej zazdrośni mężowie i ich trzy żony muszą przeprowadzić się przez rzekę. Mogą korzystać z łódki, która mieści najwyżej dwie osoby. Żadna z kobiet nie może przebywać ani na brzegu ani w łódce¹ w towarzystwie innych mężczyzn bez swojego męża. Jak dokonać przeprawy?

Rozwiązanie

Podobnie jak przy poprzedniej zagadce istnieje kilka wariantów. Oznaczmy mężów przez A, B, C żony odpowiednio przez a, b, c. Zwróćmy uwagę, że mała literka może być w zespole dużych liter tylko ze swoim „dużym” odpowiednikiem. Rozwiązanie można opisać diagramem w 11 ruchach.

¹ Często można spotkać wariant tego zadania bez ostatniego zastrzeżenia, tzn. „żadna z kobiet nie może przebywać w towarzystwie innych mężczyzn bez swojego męża”. W takiej formie zadanie z punktu widzenia ścisłej logiki jest nierozwiązywalne.

- 0) ABCabc | – stan początkowy, drugi brzeg pusty
- 1) ABCc | ab – dwie żony przeprawiają się przez rzekę,
- 2) ABCac | b – jedna z żon wróciła, po trzecią żonę,
- 3) ABC | abc – trzy żony są na drugim brzegu,
- 4) ABCc | ab – jedna z żon wraca,
- 5) Cc | ABab – na drugi brzeg przeprawia się dwóch mężów mających tam żony,
- 6) ACac | Bb – mąż wraz z żoną wracają,
- 7) ac | ABCb – przeprawia się dwóch mężów pozostawiając same żony,
- 8) abc | ABC – wraca żona pozostawiając przeprawionych trzech mężów.

Teraz przeprawa jest łatwiejsza

- 9) c | ABCab – przeprawiają się dwie żony,
- 10) bc | ABCa – jedna z żon wraca po pozostałą,
- 11) | ABCabc – przeprawiają się dwie żony, koniec przeprawy.

3. Ojciec, matka i dwoje dzieci muszą przeprowić się przez rzekę. Ojciec i matka ważą tyle samo, a każde dziecko waży tyle, co połowa rodzica. Łódka może unieść ciężar jednej osoby dorosłej. W jaki sposób dokonać przeprawy?

Rozwiązanie

Oznaczając odpowiednio ojca, matkę, pierwsze dziecko i drugie przez O, M, a, b przeprawę możemy opisać diagramem w 9 ruchach.

- 0) OMab | – stan początkowy, drugi brzeg pusty
- 1) OM | ab – przeprawiają się dzieci,
- 2) OM a | b – jedno dziecko wraca,
- 3) Ma | Ob – przeprawia się ojciec,
- 4) Mab | O – drugie dziecko wraca,
- 5) M | abO – przeprawiają się dzieci,
- 6) Ma | bO – jedno dziecko wraca,
- 7) a | MOb – przeprawia się matka,
- 8) ab | MO – drugie dziecko wraca,
- 9) | abMO – przeprawiają się dzieci, koniec przeprawy.

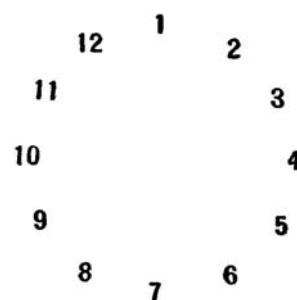
4. Znane zadanie z traktatu Alkuina *Propositiones ad acuendos iuvenes*, nie będące zadaniem o przeprawach.

Chart ujrzał zającą w odległości 150 stóp i natychmiast ruszył w pogoń. Skok zająca ma długość 7 stóp, skok charta, trwający tyle samo, ma długość 9 stóp. Po ilu skokach chart dogoni zająca?

Rozwiązanie

Zakładamy, że zając i chart skaczą jednocześnie. Po każdym skoku chart jest bliżej zająca o $9 - 7 = 2$ stopy. Skoro różnica odległości między nimi wynosiła 150 stóp, to chart dogoni zająca po $150 : 2 = 75$ skokach.

5. Weźmy kilkanaście kolejnych liczb naturalnych, poczynając od 1 i zapiszmy je na okręgu (podobnie jak pisane są liczby na tarczy zegara). Niech obserwator wybierze w myślach którąś liczbę z tego okręgu. My również wybieramy liczbę i dodajemy do niej największą z liczb na okręgu. Prosimy teraz obserwatora żeby rozpoczął liczenie pozycji od miejsca, w którym stoi wybrana przez nas liczba i od wartości pomyślanej przez siebie liczby aż do wartości znalezionej przez nas sumy w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Okaze się, że na pozycji, do której obserwator doliczy będzie zapisana pomyślana przez niego liczba.



Przykład

Utwórzmy okrąg z liczb 1,...,12. Obserwator pomyślał 6. My wybraliśmy 8. Obliczamy sumę $8 + 12 = 20$ i prosimy, aby obserwator liczył od pozycji z numerem 8 i od wartości pomyślanej przez siebie, do wartości 20 w kierunku przeciwnym ruchowi wskazówek zegara. Obserwator liczy: 6 (na pozycji 8), 7 (na pozycji 7), 8 (na pozycji 6), 9 (na pozycji 5) itd. aż do 20 i tym samym wskaże pozycję, na której stoi liczba 6 pomyślana przez niego.

Rozwiązanie

Nie ma tu żadnej magii, tylko znajomość arytmetyki. Skoro obserwator pomyślał 6 a my wybraliśmy 8, to droga od 8 do 6 wygląda tak: 8, 7, 6 (przechodzi przez trzy pozycje 1, 2, 3). Ponieważ liczenie odbywa się na okręgu z dwunastu liczb, każda pozycja powtórzy się, co 12. Dlatego liczby 8 i 20 wskazują na to samo miejsce. Gdyby obserwator zaczął liczyć na pozycji 8 od 1, to na pozycji 20 odnajdzie 1 a ponieważ zaczął liczyć od pomyślanej przez siebie liczby to na pozycji 20 odnajdzie tę właśnie liczbę.

6. Gra polega na tym, że każdy z graczy mówi jakąś liczbę od 1 do 10 i dodaje tę liczbę do sumy liczb wypowiedzianych wcześniej przez obu graczy. Wygrywa ten, kto pierwszy uzyska sumę 100. Jak zapewnić sobie zwycięstwo?

Przykład

Gracz A powiada 8.
Gracz B mówi 4 (suma wynosi 12).
Gracz A wybiera 7 (suma wynosi 19).
Gracz B mówi 5 (suma wynosi 24),
itd. aż do uzyskania sumy 100.

Rozwiązanie

Żeby wygrać należy postarać się, aby pierwszemu dojść do sumy 89. Jest jasne, że skoro przeciwnik może wybrać liczby od 1 do 10 to po sumie 89 może uzyskać sumy od 90 do 99 i wtedy ostatni ruch należy do nas.

Jak jednak uzyskać pierwszemu sumę 89? To będzie zapewnione, jeżeli pierwsi uzyskamy sumę 78 (z tych samych powodów jak poprzednio). Rozumując tak dalej dochodzimy do następujących sum, które powinniśmy pierwsi osiągnąć:

89, 78, 67, 56, 45, 34, 23, 12, 1

Wynika stąd, że aby być w tej grze zwycięzcą należy rozpocząć od 1 i pamiętać o sumach, które mamy osiągnąć. Jeżeli przeciwnik rozpoczyna i nam na to pozwoli, musimy uzyskać, jako pierwsi którąś z sum wypisanych powyżej i dalej konsekwentnie dochodzić do sum następnych.

Grę można rozwinąć. Na przykład suma liczb, do której mamy dojść nie musi być równa 100 lub liczby, które wybieramy nie muszą być z zakresy od 1 do 10. W każdym przypadku rozumowanie, które przedstawiliśmy zapewni nam zwycięstwo. Dla przykładu, jeżeli wybieramy liczby z zakresu od 1 do 9 i „ścigamy się” do sumy 120, to sumy, które jako pierwsi powinniśmy uzyskać wynoszą:

110, 100, 90, 80, 70, 60, 50, 40, 30, 20, 10

7. Podczas wypraw krzyżowych, kiedy Turcy i krzyżowcy toczyli ze sobą zażarte boje. Po jednej z potyczek nad Bosforem znalazło się na tratwie 15 Turków i 15 krzyżowców. Wspólna niedola spowodowała, że zaprzestali walki, lecz rozpętała się burza i aby ocalić tratwę 15 osób musiało wskoczyć do wody. Ustalono, że rozbitkowie ustawią się w rzędzie i do wody wskoczy, co 9 osoba. W jaki sposób mają się ustawić, aby ocalili sami krzyżowcy?

Rozwiązanie

Ponumerujemy wszystkich od 1 do 30 i z tego ciągu liczb wykreślimy piętnaście, skreślając, co dziewiątą. Numery, które pozostały oznaczają pozycje, jakie powinni zająć krzyżowcy.

1 2 3 4 5 ~~6~~ ~~7~~ ~~8~~ ~~9~~ 10 11 ~~12~~ 13 14 15 ~~16~~ 17 ~~18~~ ~~19~~ 20 21 ~~22~~ ~~23~~ ~~24~~ 25 ~~26~~ ~~27~~ 28 29 ~~30~~

Ustawienie, które nas interesuje to:

K K K K T T T T T K K T K K K T K T T K K T T T K T T K K T

gdzie litera „K” oznacza krzyżowca, litera „T” oznacza Turka.

8. Mamy 4 pary liter ułożonych następująco: _ _ a b a b a b a b (na początku tego ciągu są dwa puste miejsca). Należy wykorzystując tylko puste miejsca i przekładając litery po 2 sąsiadujące ze sobą, uporządkować ten ciąg alfabetycznie.

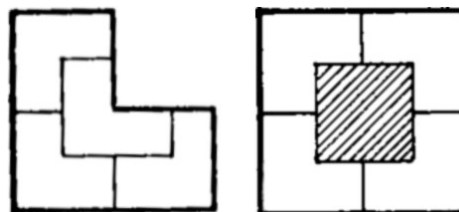
Rozwiązanie

0	_ _ a b a b a b a b
1	b a a b a b a _ _ b
2	b a a b _ _ a a b b
3	b _ _ b a a a a b b
4	b b b b a a a a _ _
5	b b _ _ a a a a b b
6	b b a a a a _ _ b b
7	_ _ a a a a b b b b

9. Podzielmy kwadrat na cztery mniejsze, równe kwadraty. Jeden z nich usuńmy. Jak ponownie złożyć duży kwadrat nie wstawiając usuniętego kwadratu na dawne miejsce?

Rozwiązanie

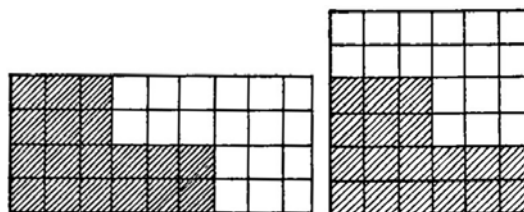
Istnieją, jak to się w matematyce mówi „trywialne rozwiązania”, gdzie któryś z pozostałych kwadratów zamienia się miejscami z kwadratem usuniętym, rozwiązania te nas nie interesują. Dużo ciekawszym rozwiązaniem jest zaprezentowane poniżej, gdzie usunięty kwadrat wstawiamy w środek kwadratu powstałego przez odpowiednie cięcie i ułożenie nieusuniętych części dużego kwadratu.



10. Weźmy prostokąt o wymiarach 4 na 9 (może to być część kartki z zeszytu w kratkę). Należy przeciąć go na dwie równe części, w taki sposób, żeby po innym złożeniu tych części otrzymać kwadrat.

Rozwiązanie

Skoro prostokąt ma wymiary 4 na 9, to jego pole wynosi $4 \cdot 9 = 36$. Takie samo pole ma złożony kwadrat. Wobec tego bok kwadratu równy jest 6. Teraz już łatwo można ustalić linie cięcia prostokąta.



11. Pomyśli jakąś liczbę. Pomnóż ją przez 3 (możesz to zrobić pisemnie). Jeżeli wynik jest liczbą nieparzystą, dodaj do wyniku 1 i sumę podziel przez 2. Gdyby wynik mnożenia przez 3 jest parzysty od razu podziel go przez 2. Teraz jeszcze raz pomnóż otrzymany wynik przez 3 i sprawdź ile dziesiątek mieści się całkowicie w wyniku tego mnożenia. Pomnóż tę liczbę przez 2. Jeżeli po pierwszym dzieleniu dodawałeś (dodawaliśmy) 1, to do wyniku również dodaj 1. Okazuje się, że po tych operacjach otrzymałeś (otrzymałaś) pomyślaną liczbę.

Przykład

Jeżeli pomyślaną liczbą jest 6. To po pomnożeniu przez 3 otrzymamy 18. Po podzieleniu wyniku przez 2 otrzymamy 9. Po ponownym pomnożeniu przez 3 otrzymamy 27. W 27 dziesiątka mieści się 3 razy, stąd $3 \cdot 2 = 6$. Niech pomyślaną liczbą będzie 7. Po pomnożeniu przez 3 otrzymamy 21. Zwiększając wynik o 1 otrzymamy 22. Połowa z tego to 11. Po ponownym pomnożeniu przez 3 otrzymamy 33. W liczbie 33 dziesiątka mieści się 3 razy, dlatego $3 \cdot 2 + 1 = 7$.

Rozwiązanie

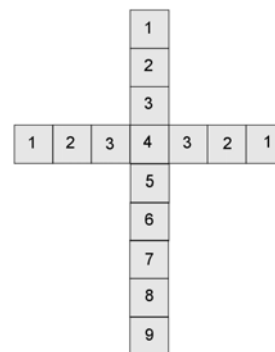
Dlaczego w końcowym wyniku otrzymano pomyślaną liczbę stanie się jasne po zapisaniu wszystkich operacji w postaci wyrażeń algebraicznych. Rozważymy dwa przypadki. Pierwszy, kiedy pomyślaną liczbą jest parzysta. Można ją wobec tego przedstawić w postaci $2n$. Kolejne operacje na tej liczbie to:

- I. $3 \cdot 2n,$
 II. $\frac{3 \cdot 2n}{2},$
 III. $3 \cdot n \cdot 3,$
 VI. $9n \div 9 = n,$
 V. $2n$

Zwróćmy uwagę na przedostatnią liniijkę gdzie symbol $\div$ oznacza dzielenie całkowite. W dzieleniu całkowitym inaczej zwanym *dzieleniu z resztą* iloraz jest liczbą całkowitą i oznacza ile razy dzielnik całkowicie mieści się w dzielnej np. $6 \div 2 = 3$ bo 2 mieści się w 6 trzy razy, $5 \div 3 = 1$ ponieważ 3 mieści się w 5 tylko jeden raz (zostaje reszta 2, w której 3 się nie mieści). Po przeprowadzeniu wszystkich opisanych operacji, wróciliśmy do liczby $2n$. Przypadek drugi, pomyślana liczba jest nieparzysta. Przedstawimy ją, zatem jako $2n + 1$. Podobnie jak poprzednio w kolejnych liniach zapisujemy kolejne operacje:

- I. $3 \cdot (2n + 1),$
 II. $3 \cdot (2n + 1) + 1 = 6n + 4$
 III. $\frac{6n + 4}{2} = 3n + 2$
 IV. $3 \cdot (3n + 2) = 9n + 6$
 V. $(9n + 6) \div 9 = n$
 VI. $2n$
 VII. $2n + 1$

12. Pewna znakomita dama miała krzyżyk, zdobiony dużymi brylantami. Nie wiedziała, ile było brylantów i zupełnie jej to nie interesowało. Zwróciła jej uwagę inna właściwość krzyżyka. Licząc brylanty z dowolnego końca krzyżyka do jego podstawy zawsze naliczała 9 kamieni. Pewnego dnia krzyżyk trzeba było oddać do naprawy. Przy tej okazji dama opowiedziała o tej właściwości jubilerowi.



— Proszę zobaczyć! Z któregokolwiek końca ramion liczę brylanty, zawsze przy podstawie otrzymam 9. W ten sposób za każdym razem wiem czy ilość kamieni się zgadza.

— Tylko w ten sposób sprawdza Pani, czy w krzyżyku zgadza się liczba brylantów? – zapytał jubiler.

— Tak, ale to mi zupełnie wystarcza. Po skończonej naprawie również tym sposobem sprawdzę czy wszystko jest w porządku.

Jubiler okazał się nieuczciwy. Wyjął i zostawił sobie dwa brylanty, przerobił krzyżyk i zwrócił damie.

Dama przeliczyła kamienie i uznała, że wszystko się zgadza.

W jaki sposób jubiler przerobił krzyżyk tak, że dama nie zauważyła kradzieży?

Rozwiązanie

Łatwo zauważyć, że jubiler odciął po jednym końcu z poprzeczki krzyżyka, po czym przesunął ją o jeden rząd wyżej. W ten sposób z krzyżyka z poprzedniego rysunku otrzymuje się krzyż, w którym brakuje dwóch brylantów.

		1		
		2		
1	2	3	2	1
		4		
		5		
		6		
		7		
		8		
		9		

Dama przeliczając brylant swoim sposobem, to znaczy licząc od każdego z końców do podstawy, zawsze otrzymywała 9 kamieni i nie zauważyła oszustwa.

Oczywiście, żeby znaleźć pomyłkę lekkomyślnej damy i zauważyć nieuczciwość jubлера, nie trzeba mieć drogocennych kamieni. Aby to pokazać wystarczy wziąć 15 kamyków, 15 guzików itp.

Co ciekawe, zamiast przywłaszczać sobie 2 kamienie, jubiler mógł równie dobrze dodać do krzyżyka 2 własne brylanty. Dama przy swoim sposobie liczenia również by tego nie zauważyła. W tym celu wystarczy, żeby jubiler dodał do końców poprzeczki po jednym brylancie a całą poprzeczkę opuścił o jeden rząd w dół.

13. Jak z liczby 666 otrzymać liczbę półtora raza większą, nie wykonując żadnych działań arytmetycznych?

Rozwiązanie

Liczba półtora raza większa od 666 to oczywiście $666 \times 1.5 = 999$ i widać od razu, że wystarczy 666 obrócić o 180° (jak to się mówi „do góry nogami”), co nie jest przecież żadnym działaniem arytmetycznym.

14. W koszyku mamy 5 jabłek. Jak je podzielić między 5 osób tak, żeby każda osoba otrzymała po jednym jabłku i jedno jabłko pozostało w koszyku?

Rozwiązanie

Oczywiście jedna osoba ma otrzymać koszyk z jabłkiem; każda osoba ma wtedy po jabłku i jedno jabłko jest w koszyku. Zauważmy, że czasami najprostsze odpowiedzi są tak oczywiste, że na początku nie bierze się ich pod uwagę.

15. Pewien człowiek napisał o sobie takie zdanie:

Wszystkich palców mam dwadzieścia pięć, u jednej ręki tyle samo co u drugiej, a u obu nóg dziesięć.

Czy to możliwe?

Rozwiązanie

Możliwe, wystarczy tylko w podanym zdaniu poprawić interpunkcję:

Wszystkich palców mam dwadzieścia, pięć u jednej ręki (tyle samo co u drugiej), a u obu nóg dziesięć.

16. Dwóch ułanów ciągle zakładało się, który jest lepszym jeźdźcem. Pewnego dnia jeden zaproponował drugiemu. – Zróbmy zawody jeździeckie ale tym razem wygra

ten, którego koń przybędzie drugi na metę. Cały pułk przybył na tor, aby obserwować tak niezwykłą rywalizację. Sędzia dał sygnał do startu, zawodnicy w ślimaczym tempie rozpoczęli bieg. Minęło kilka godzin, wszyscy byli bardzo znużeni a zawodnicy nie przebyli nawet czwartej części dystansu. Wtem stary ułan wykrzyknął: – Dosyć tego! Podbiegł do zawodników i szepnął im coś na ucho. Ci po chwili pędzili już jak szaleni. Po paru minutach dopadli do mety i zgodnie z zakładem wygrał ten, którego koń przybył jako drugi. Co szepnął im stary ułan?

Rozwiązanie

Stary ułan kazał im się zamienić końmi.

17. Jak podzielić 5 ciastek pomiędzy 6 osób, nie dzieląc żadnego z nich na 6 części?

Rozwiązanie

Trzy ciastka dzielimy na połowy, każda z osób dostaje po $\frac{1}{2}$ ciastka. Dwa pozostałe ciastka dzielimy na trzy części, mamy 6 części, które rozdzielamy między 6 osób. Można to opisać sumą ułamków:

$$3 + 2 = 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} = 6 \cdot \frac{1}{2} + 6 \cdot \frac{1}{3}$$

Każda z osób otrzymała:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

18. Krawiec ma belę materiału o długości 16 m. Każdego dnia odcina od tej beli 2 m materiału i szyje z niego bluzy. Po ilu dniach krawiec odetnie ostatni kawałek?

Rozwiązanie

Zwykle poda odpowiedź po 8 dniach i jest to błędna odpowiedź na zadane pytanie. Rzeczywiście w beli będzie osiem dwumetrowych kawałków ale ostatnie 2 m krawiec odkroi 7 dnia, bo pozostałe na 8 dzień dwa metry nie będą wymagały odkrojenia.

19. Należy napisać liczbę 100 sześcioma jednakowymi cyframi.

Rozwiązanie

Istnieje wiele sposobów, żeby to osiągnąć np. $99\frac{99}{99}$.

Jeżeli dopuścimy działania arytmetyczne możemy napisać $55 + 55 - 5 - 5$.

20. Należy napisać liczbę 9 przy pomocy dziesięciu różnych cyfr (a więc wszystkich cyfr).

Rozwiązanie

Pokazujemy dwa możliwe rozwiązania:

$$\frac{97524}{10836}, \frac{95823}{10647}, \frac{95742}{10638}$$

Jeżeli dopuścimy sytuację, w której liczba 12 utożsamiana jest z 012 możliwe są kolejne rozwiązania, np.:

$$\frac{75249}{08361}, \frac{58239}{06471}, \frac{57429}{06381}$$

21. Należy napisać liczbę 100 przy pomocy 9 różnych cyfr.

Rozwiązanie

Pokazujemy kilka możliwych rozwiązań:

$$91\frac{5742}{638}, 91\frac{7524}{836}, 94\frac{1578}{263}, 96\frac{2148}{537}, 96\frac{1428}{357}$$

Jeżeli dopuścimy działania arytmetyczne, możemy podać np. takie rozwiązania:

$$97 + \frac{5+3}{8} + \frac{6}{4} + \frac{1}{2} = 100, \quad 75 + 24 + \frac{9}{18} + \frac{3}{6} = 100, \quad 95\frac{1}{2} + 4\frac{38}{76} = 100$$

lub zapisy pisemne dodawania, które zawierają 9 różnych cyfr:

46	56
37	8
+15	4
-----	+ 3
98	-----
+ 2	71
-----	+ 29
100	-----
	100

22. Jak zapisać liczbę:

- a) 0 wykorzystując trzy cyfry 5?
- b) 1 wykorzystując trzy cyfry 5?
- c) 2 wykorzystując trzy cyfry 5?
- d) 5 wykorzystując trzy cyfry 5?

Rozwiązanie

Można wskazać wiele rozwiązań, oto niektóre z nich:

- a) $(5-5)^5 = 0^5 = 0, \quad 5 \cdot (5-5) = 5 \cdot 0 = 0, \quad \frac{5-5}{5} = \frac{0}{5} = 0,$
- b) $\left(\frac{5}{5}\right)^5 = 1^5 = 1, \quad \sqrt[5]{\frac{5}{5}} = \sqrt[5]{1} = 1, \quad 5^{5-5} = 5^0 = 1,$
- c) $\frac{5+5}{5} = \frac{10}{5} = 2,$

d) $5 + 5 - 5,$ $5 \cdot \frac{5}{5},$ $5^{\frac{5}{5}} = 5^1 = 5$

23. Czy można w 10 boksach umieścić 11 koni, tak żeby każdy koń znajdował się w jednym boksie? Wydaje się to niemożliwe. Tymczasem istnieje sposób liczenia, który to gwarantuje. Możemy postąpić następująco. W boksie pierwszym umieszczamy konia pierwszego i na chwilę konia jedenastego. W takim razie w pierwszym boksie mamy dwa konie. Następnie w boksie drugim umieszczamy konia trzeciego, w boksie trzecim konia czwartego itd., w boksie ósmym konia dziewiątego a w boksie dziewiątym konia dziesiątego. Boks dziesiąty pozostaje wolny więc przenosimy do niego jedenastego konia i zadanie mamy rozwiązane.

Rozwiązanie

Ulegliśmy tutaj magii słów. Podczas tej wyliczanki nie rozmieszczono 11 koni tylko 10. Jak uważnie jeszcze raz prześledzimy sposób ustawiania koni w boksach to okaże się, że gdzieś nam się zapodział koń nr 2 i w tym kryje się cały sekret. „W takim razie w pierwszym boksie mamy dwa konie. Następnie w boksie drugim umieszczamy konia trzeciego (...)”. Dwa konie to znaczy koń nr 1 i koń nr 11, a co z koniem nr 2? Zanim umieści się konia trzeciego, należy zatroszczyć się o konia drugiego.

Znanych jest wiele zadanie, w których „grę słów” wykorzystuje się do omotania rozwiązującego. Czasami tak można się w nich zagubić, że gotowi jesteśmy uwierzyć w rzeczy absurdalne np. znikające kwoty, oto przykład.

Trzej chłopcy złożyli się po złotówce (razem 3 zł) i poprosili czwartego kolegę o kupno soku. Sok kosztował 2,5 zł. Kupujący kolega pomyślał tak: ponieważ zostaje 50 gr. reszty a to nie dzieli się na trzy, dam im sok i zwrócę każdemu z nich po 10 gr. a 20 gr. zatrzymam sobie. W takim razie chłopcy złożyli się po 90 gr. (otrzymali 10 gr. reszty), razem wydali więc 2 zł 70 gr., kupujący zatrzymał 20 gr., co razem daje 2 zł 90 gr. Co więc stało się z 10 gr. brakującymi do 3 zł?

Rozwiązanie

Jest to klasyczne wprowadzenie w błąd wynikające z pomieszania działań. Rzeczywiście chłopcy złożyli się po 90 gr. co daje 2 zł 70 gr. Otrzymali sok za 2 zł 50 gr. a kupujący zatrzymał 20 gr., co również razem daje 2 zł 70 gr. Więc wszystko się zgadza.

W podobnym tonie utrzymany jest następujący żart, który pozwala na „darmowe” wypicie butelki coca-coli.

Pewien jegomość wszedł do sklepu i poprosił ekspedientkę o pepsi-colę, kiedy ta spełniła jego życzenie ten wziął butelkę, obejrzał i zwrócił ekspedientce mówiąc — Wolałbym jednak butelkę coca-coli.

Ekspedientka przyjęła butelkę i powiada:

— Proszę bardzo, wszystko mi jedno, oba napoje kosztują tyle samo.

Następnie otworzyła i podała klientowi butelkę coca-coli. Ten wypił i bez zapłacenia szykował się do wyjścia.

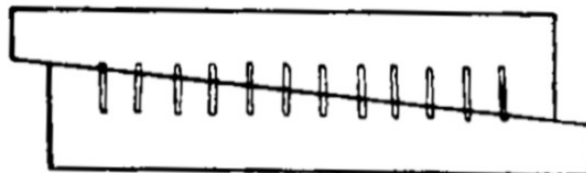
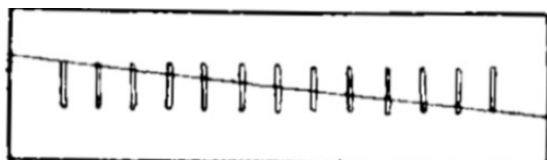
— Chwileczkę — mówi ekspedientka — a należność?

— Za co? — Obruszył się klient — Przecież za butelkę coca-coli oddałem pani butelkę pepsi-coli w tej samej cenie.

— No to proszę zapłacić za pepsi-colę — odpowiada ekspedientka. A klient na to:

— Jakże mam płacić za coś czego nie wypilem?

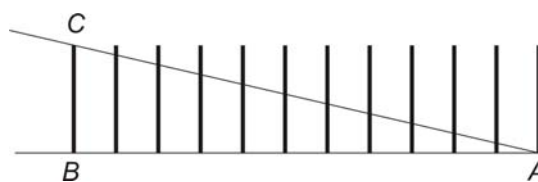
24. Narysujmy na kawałku kartonu 13 jednakowych równooddalonych odcinków o długości 1 cm każdy. Przetnijmy karton na ukos w taki sposób, żeby linia cięcia przechodziła przez początek pierwszego odcinka i koniec odcinka ostatniego. Poniższy rysunek pokazuje linię cięcia.



Po przecięciu kartonu przesunąmy jego górną część tak, aby odcinek ostatni zajął miejsce odcinka przedostatniego. Okazuje się, że po przesunięciu na kartonie pozostało 12 odcinków. Pokazuje to kolejny rysunek.

Rozwiązanie

Oczywiście to, że jeden odcinek „rozpłynął” się bez śladu jest złudzeniem. Co prawda widzimy 12 odcinków (a nie 13) ale za to każdy z nich ma nieco większą długość niż przed przesunięciem przeciętego kartonu. Kolejny rysunek wyjaśnia wszystko.



Linia cięcia AC oraz linia podstawy odcinków AB tworzą kąt. Zgodnie z twierdzeniem Talesa odpowiednie odcinki w tym kącie są proporcjonalne. 12 odcinek (licząc od lewej) linia cięcia AC przetnie na kawałki $\frac{1}{12}$ i $\frac{11}{12}$. 11 odcinek zostanie przecięty

na kawałki $\frac{2}{12}$ i $\frac{10}{12}$. 10 odcinek zostanie przecięty na kawałki $\frac{3}{12}$ i $\frac{9}{12}$ itd. Odcinki 1

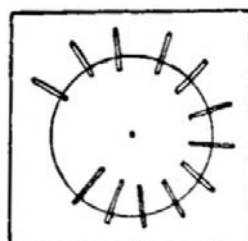
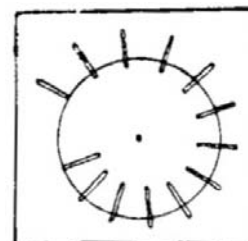
oraz 13 nie zostaną przecięte. Jeżeli teraz przesuniemy górną część kartonu w lewo odcinek 13 pokryje się z dolną częścią odcinka 12, co w sumie da

odcinek długości $\frac{1}{12} + \frac{12}{12} = \frac{13}{12}$. Podobnie górna część odcinka 12

pokryje się z dolną częścią odcinka 11, dając odcinek długości $\frac{2}{12} + \frac{11}{12} = \frac{13}{12}$ itd. Łącznie zatem otrzymamy 12 odcinków o długości

$\frac{13}{12}$ co daje 13 cm. Taką samą łączną długość miało 13 odcinków po 1 cm. Nic więc nam nie zginęło.

Wykorzystując powyższy pomysł można zrobić „czarodziejskie koło”, które w sposób bardzo efektowny prezentuje znikanie odcinków. Należy odcinki jednakowej długości narysować odpowiednio

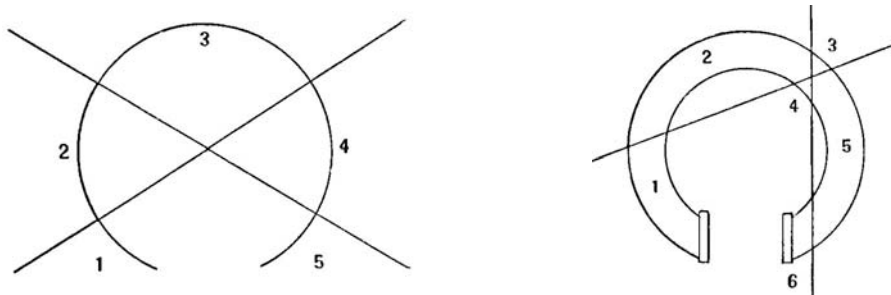


na okręgu. Następnie wyciąć okrąg i tak połączyć elementy (np. na tekturce) aby wycięte koło można było obracać względem środka. Przekręcenie środkowego koła tak, żeby sąsiednie kreseczki się nałożyły powoduje efektowne zniknięcie jednej kreski. Wiemy już, że nie są to czary, tylko pozostałe kreseczki wydłużają się o $1/12$ kosztem tej, która niby zniknęła.

25. Jak dwoma prostymi cięciami podzielić podkowę na 6 części?

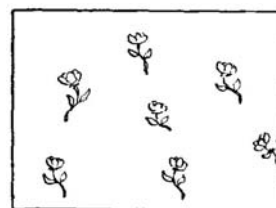
Rozwiązanie

Narysujmy wycinek (łuk) okręgu, który będzie symbolizował podkowę nie mającą „szerokości”. Widać na podstawie poniższego rysunku, że dwoma cięciami można go podzielić najwyżej na 5 części.

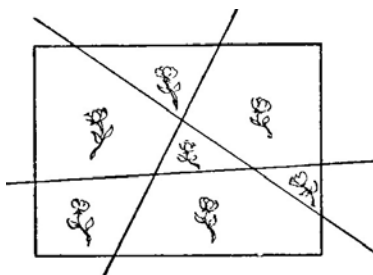


Jeżeli zmienia się położenie linii cięcia, to ilość części może co najwyżej się zmniejszyć. dodajmy teraz „szerokość” do schematu podkowy. Wycinek okręgu stanie się wycinkiem pierścienia i nasz schemat zbliży się do wyglądu prawdziwej podkowy. Teraz widać, że dzięki temu zabiegowi można tak poprowadzić linie cięcia, że przybędzie kolejny (choć niewielki) obszar. Ciekawe eksperymenty można przeprowadzić tnąc wycinek koła i pierścienia dodatkową, trzecią linią.

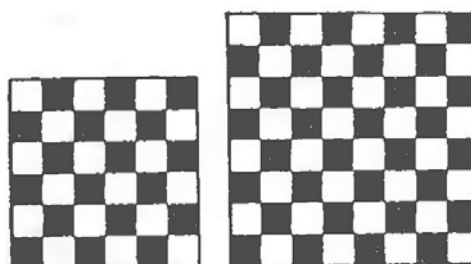
26. W ogrodzie, jak na rysunku obok, rośnie 7 róż. W jaki sposób podzielić ogród trzema liniami prostymi tak, aby w każdej z otrzymanych części rosła tylko jedna róża?



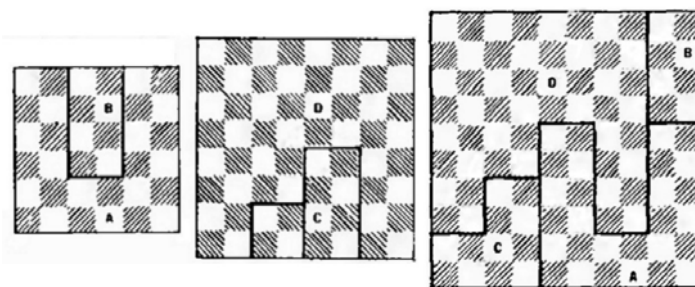
Rozwiązanie



27. Mamy dwie szachownice. Jedną składającą się z 36 pól. Drugą składającą się z 64 pól (rysunek obok). W jaki sposób, każdą z szachownic rozciąć na 2 części, tak, aby po złożeniu wszystkich 4 części otrzymać jedną szachownicę ze 100 pól?



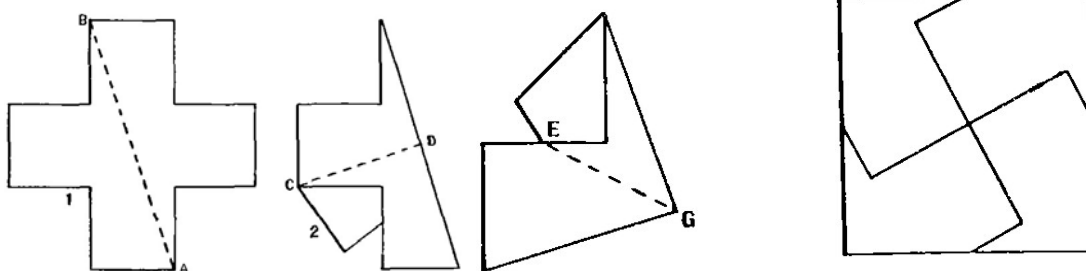
Rozwiązanie



28. W jaki sposób rozciąć jednym cięciem nożyc grecki krzyż (o prostych ramionach jednakowej długości, innymi słowy ułożony z 5 jednakowych kwadratów), tak, aby po złożeniu otrzymać kwadrat? ile wynosi długość boku otrzymanego kwadratu, jeżeli długość boku każdego z 5 kwadratów wchodzących w skład greckiego krzyża wynosi 4 cm?

Rozwiązanie

Zadanie jest „podchwytliwe”. Wyjściowy krzyż przed cięciem należy złożyć tak, jak pokazuje przerywana linia rysunku poniżej. Składamy najpierw wzdłuż linii AB (1), następnie wzdłuż linii CD (2).



Po złożeniu otrzymamy figurę widoczną na kolejnym rysunku, którą przecinamy nożycami wzdłuż linii EG . W ten sposób otrzymamy 4 części, z których składamy kwadrat jak na rysunku poniżej. Zadanie pochodzi z końca XIX w. kiedy jeszcze figura utworzona przez linie cięcia nie niosła za sobą złych skojarzeń.

Jeżeli każdy z kwadratów wchodzących w skład greckiego krzyża miał bok 4 cm, to pole całego krzyża wynosiło $5 \cdot 4^2 = 80$. Pole kwadratu powstałego po złożeniu pociętych części oczywiście nie zmieniło się, więc jego bok wynosi $\sqrt{80} = 4\sqrt{5}$. Powtórzmy te wyliczenia dla dowolnego boku kwadratów wchodzących w skład krzyża. Jeżeli bok ten wynosi a , to pole krzyża równe jest $5a^2$. Stąd bok otrzymanego po złożeniu części kwadratu wynosi $\sqrt{5a^2} = a\sqrt{5}$.

29. Interesującą i pouczającą zabawą jest budowanie anagramów. Anagramy to takie słowa, które powstały z innych słów po przestawieniu w nich głosek lub liter. Dla przykładu słowo **kat** przeczytane od końca (albo po zamianie „k” na „t”) stworzy anagram **tak**. Widać natychmiast, że jeżeli słowo **X** jest anagramem słowa **Y** to i odwrotnie, anagramem słowa **Y** jest słowo **X**. Z jednego słowa można utworzyć wiele różnych anagramów, ze słowa **bryka** możemy utworzyć **kraby**, **rybak**, **rybka**. W anagramach można też słowa rozdzielać na przykład **tona**, **nota**, **na to**. Im słowo krótsze tym łatwiej znaleźć do niego anagram. Dla słowa **on** widoczny jest natych-

miast anagram **no** (brzydko to brzmi ale słowo takie istnieje). Znalezienie anagramu dla słowa długiego np. **kalendarzowy** nie jest już takie proste, jest nim słowo **zdeklarowany**. Ile może istnieć maksymalnie anagramów dla słowa złożonego z 5 liter? A ile ze słowa n literowego?

Rozwiązanie

Po pierwsze zauważmy, że nie możemy określić dokładnie ilości anagramów bez znajomości słowa. Nie każde przestawienie liter daje anagram. Dlatego też zapytaliśmy „ile może istnieć”. Po drugie zwróćmy uwagę, że istnieją słowa, w których litery powtarzają się. Należy rozpatrzyć dwa przypadki, pierwszy dotyczy słów, w których litery się nie powtarzają i drugi dotyczy słów gdzie niektóre litery mogą wystąpić wielokrotnie.

Anagramów może istnieć tyle, na ile sposobów da się napisać 5 liter. Pierwszą literę możemy napisać na każdej z 5 dostępnych pozycji (słowo jest pięcioliterowe). Drugą literę można napisać tylko na 4 pozycjach, trzecią na 3, czwartą na 2, ostatnią na pozostałej jednej pozycji. Razem daje to $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ możliwości. Oczywiście tylko dla niektórych, krótkich 2-3 literowych słów każdą pozycję można wykorzystać i każde przestawienie liter daje anagram. Dla słów dłuższych liczba rzeczywistych anagramów jest znacznie mniejsza. Uzyskany tu iloczyn kolejnych liczb nazywa się w matematyce silnią i oznacza symbolem „!”, zatem $5! = 120$ a przestawiania tych samych elementów to są ich kombinacje. Jeżeli słowo składa się z n niepowtarzających się liter, to teoretycznie może istnieć do niego $n!$ anagramów. Jeżeli litery się powtarzają, to otrzymany wynik należy podzielić przez liczbę kombinacji tych liter, które się powtarzają. Ze słowa **oko** nie można utworzyć $3! = 6$ różnych kombinacji liter (nie mówimy o anagramach, bo żadna z innych kombinacji nie funkcjonuje ja słowo w języku polskim) a tylko $3! : 2! = 6 : 2 = 3$: **koo, oko, ook**. Poniżej przedstawiamy kilkadziesiąt anagramów różnych słów i zachęcamy czytelnika do powiększenia tej liczby.

adapter petarda
bary ryba
carski skarci
dotrwa twardo
dziad dzida
garb grab
Iran rani
karat karta katar krata tarka
katorga rogatka
kolejarz rozkleja
koloratka lokatorka
komisarz zamorski
krowi wkroi
kula luka
ledwo odlew

mlaska skamla
mniszka szminka
napiwek pewniak
naszywka wskazany
Niemcy ciemny
nuworysz sznurowy
odpruwa pudrowa
oprawka parkowa
optyka potyka
oskrzela skleroza
oznaczy zaoczny
paskowy pyskowa
pazerny perzyna
podwozi powodzi
port trop

powiat powita
puryta uparty
ranny rynna
rozpustny upstrzony
rzesza szarze
senat setna
stwarza wzrasta
wigor wrogi
wnioskowa woskowina
wymaz zmywa
zalew zlewa
zawija zjawia
zbrodnia zdrobnia

30. Tablicę złożoną z n^2 wypełnionych liczbami klatek (to znaczy tablicę o wymiarach $n \times n$) będziemy nazywali kwadratem magicznym jeżeli suma liczb stojących w każdym rzędzie, będzie równa sumie liczb stojących w każdej kolumnie i będzie równa sumie liczb stojących na każdej przekątnej. Ta suma nazywa się sumą magiczną. Liczbę n nazywa się rzędem kwadratu. Jeżeli znamy jakiś kwadrat magiczny rzędu n , to znamy ich nieskończenie wiele. Wystarczy do każdej liczby w naszym kwadracie dodać tę samą wielkość. Najprostsze są kwadraty rzędu 3.

a) **Przepis na kwadrat rzędu 3.** Niech suma magiczna wynosi $3a$. W środkowej komórce kwadratu wstawmy liczbę a . Jeżeli w prawym górnym rogu wstawimy $a+b$, to w lewym dolnym należy wstawić $a-b$. Analogicznie, jeżeli w lewym górnym wstawimy $a+c$, to w prawym dolnym należy wstawić $a-c$. Pozostałe cztery klatki kwadratu wypełnimy tak, żeby zachować sumę magiczną $3a$. Otrzymamy wszystkie klatki z wyrażeniami algebraicznymi trzech parametrów a, b, c . Podstawiając za te parametry liczby, dla których wszystkie wyrażenia w kratkach będą różne, otrzymamy kwadraty magiczne. Podstawiając $a=1, b=2, c=3$ otrzymamy kwadrat (I) o sumie magicznej 3. Podstawiając $a=5, b=1, c=3$ otrzymamy kwadrat (II) o sumie magicznej 15. Ma on tę własność, że jego wyrazy są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego o pierwszym wyrazie 1. Łatwo pokazać, że kwadrat rzędu n , którego wyrazy są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego o pierwszym wyrazie 1, ma sumę magiczną:

$a+c$		$a+b$
	a	
$a-b$		$a-c$

$a+c$	$a-b-c$	$a+b$
$a+b-c$	a	$a-b+c$
$a-b$	$a+b+c$	$a-c$

$$S = \frac{n^2(n^2+1)}{2 \cdot n} = \frac{n(n^2+1)}{2}$$

(I)

4	-4	3
0	1	2
-1	6	-2

(II)

8	1	6
3	5	7
4	9	2

(III)

11	4	9
6	8	10
7	12	5

Kwadrat (III) Powstał z kwadratu (II) przez dodanie w każdej komórce liczby 3. Jego wyrazy są wyrazami ciągu arytmetycznego rozpoczynającego się od 4. Suma magiczna tego kwadratu wynosi 24 i jest o $3 \cdot 3 = 9$ większa od sumy kwadratu wyjściowego. Zauważmy, że mając jakikolwiek kwadrat magiczny rzędu 3 obracając go względem każdego boku (4 obroty razem z obrotem o kąt 360° , który jest tożsamościowy), odbijając względem przekątnych (2 odbicia) i względem środkowego wiersza i środkowej kolumny (2 odbicia). Otrzymujemy łącznie 8 kwadratów powstałych z tych samych liczb. Zatem mając jeden kwadrat rzędu 3 mamy wszystkie (8) kwadratów rzędu 3, które powstają poprzez symetrie i obroty kwadratu wyjściowego.

b) **Przepis na kwadrat rzędu 4.** Wypełniamy cztery środkowe komórki kwadratu różnymi liczbami a, b, c, d . Dwie niewypełnione komórki przekątnych wypełniamy sumami i różnicami wyrażeń tak, aby suma magiczna była równa $a+b+c+d$.

$b-d$	$d-b-c$	$d+2c$	$a+b$
$b-a+c+d$	a	b	$a-b$
$2a$	c	d	$b-a$
$d-b$	$2b+c$	$a-c-d$	$c+d$

Suma magiczna tak powstałego kwadratu wynosi $a+b+c+d$. Podstawiając za a, b, c, d konkretne wartości liczbowe, należy zwracać uwagę aby otrzymywane wartości poszczególnych komórek nie powtarzały się.

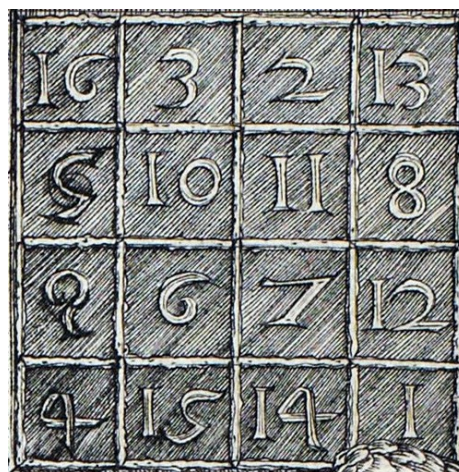
Przykładowo przyjmijmy $a=2, b=3, c=7, d=12$ otrzymamy kwadrat (IV), którego suma magiczna wynosi 24.

(IV)

-9	2	26	5
20	2	3	-1
4	7	12	1
9	13	-17	19

Najsłynniejszy kwadrat magiczny rzędu 4 możemy znaleźć na miedziorycie **Albrechta Dürera** – Melancholia I z 1514 r. Jest zbudowany z 16 kolejnych liczb naturalnych. Jego suma magiczna wynosi 34. Jest to także suma czterech narożników. Suma pól w każdej ćwiartce i suma czterech pól środkowych.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1





Albrecht Dürer – Melancholia I, Galeria Albertina w Wiedniu.

31. Nie korzystając z kwadratu (II) z poprzedniego zadania, znaleźć wszystkie kwadraty magiczne rzędu 3 zbudowane z liczb od 1 do 9.

Rozwiązanie

Suma magiczna w tych kwadratach równa jest $\frac{1}{3}(1+2+\dots+9)=15$.

Zatem w kolumnie bądź wierszu mogą stać trzy takie liczby, których suma wynosi 15. Weźmy 1, żeby powyższy warunek był zachowany w rzędzie bądź kolumnie z liczbą 1 stać może 5 i 9 lub 6 i 8. Stąd mamy wiersz i kolumnę zawierające liczby 1, 5, 9, 6, 8. Pozostałe liczby tzn. 2, 3, 4, 7 powinny zająć miejsca gwiazdek. Pierwsza góra gwiazdka nie może być zastąpiona liczbą 2 gdyż pierwsza dolna musiałaby być liczbą 8 (jedna ósemka już jest). Pierwsza górna gwiazdka nie może być liczbą 3, gdyż pierwsza dolna musiałaby być liczbą 7 i druga dolna musiałaby być liczbą 0, czego nie dopuszczamy. Pierwsza górna gwiazdka nie może być liczbą 4, ponieważ pierwsza dolna musiałaby być liczbą 6 (która już wykorzystano). Jedyna poprawna wartość pierwszej górnej gwiazdki to 7, co determinuje kwadrat pokazany obok. Obracając ten kwadrat względem boków otrzymamy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 6 & * & * \\ 8 & * & * \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 6 & 7 & 2 \\ 8 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 6 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \\ 4 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 2 & 7 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 5 & 7 & 3 \\ 1 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

Odbijając względem środkowego wiersza i środkowej kolumny oraz względem przekątnych:

$$\begin{bmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 2 \\ 1 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 9 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 6 \\ 4 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 8 \\ 5 & 7 & 3 \\ 9 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 9 \\ 3 & 7 & 5 \\ 8 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

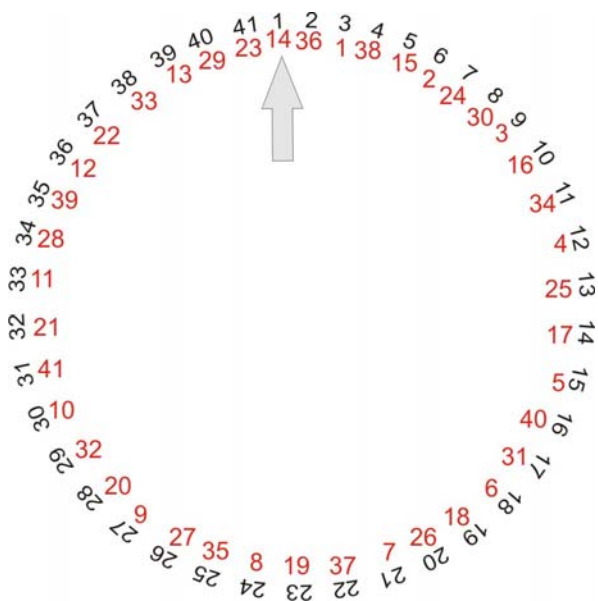
Razem uzyskaliśmy 8 kwadratów magicznych rzędu 3, wypełnionych liczbami 1,2,...9.

32. Istnieje wiele zadań związanych z wyliczaniem. Najstarsze i najbardziej znane jest autorstwa, Józefa Flawiusza historyka żydowskiego i uczestnika powstania Żydów przeciw Rzymowi z lat 66–70 naszej ery, zakończonego zburzeniem Jerozolimy przez Tytusa. Zadania, chociaż liczy sobie prawie 2000 lat jest przykładem ważnej klasy algorytmów, które mają ustalić jaki element pozostanie, jeżeli na okręgu umieścimy n elementów i będziemy eliminowali co k -ty element.

Po upadku powstania grupa 41 bojowników żydowskich wśród których był Józef Flawiusz wraz ze swoim przyjacielem, schroniła się w jednej z jaskiń. Powstańcy nie chcąc poddać się Rzymianom postanowili popełnić samobójstwo, co stało w sprzeczności z zasadami religii żydowskiej. Józef Flawiusz zaproponował następujące rozwiązanie. Powstańcy staną na planie okręgu i od jednego z ich rozpocznie się wyliczanie do trzech. Na kogo popadnie, też zostanie zabity przez towarzyszy i nie popełni grzechu śmiertelnego odbierając sobie życia. Na jakich pozycjach stanęli Flawiusz i jego przyjaciel, że pozostali jako ostatni i nie zabili się nawzajem.

Rozwiązanie

Ustawmy 41 kolejnych liczb na planie okręgu (okrąg zewnętrzny, czarny). Jeżeli idąc zgodnie z ruchem wskazówek zegara i rozpoczynając odliczanie od 1, będziemy eliminowali co trzecią liczbę to numery w okręgu wewnętrznym (czerwonym) pokażą nam kolejność tych eliminacji. Pierwsza eliminowaną liczbą będzie 3, drugą 6, trzecią 9 itd. przedostatnią liczbą będzie liczba z pozycji czterdziestej czyli 16, ostatnią liczba z pozycji czterdziestej pierwszej czyli 31. W zadaniu Flawiusz gdyby wyliczanie rozpoczęło się od 1 to zajmując na okręgu 16 i 31 miejsce Flawiusz i jego przyjaciel ocaleliby.



33. Odgadywanie liczb. Niech nasz kolega weźmie do każdej ręki nieznaną nam, ale równą liczbę dowolnych przedmiotów (zapałek, monet itp.). Poprośmy kolegę aby przełożył z ręki prawej do lewej a przedmiotów. Niech teraz kolega odłoży na bok tyle przedmiotów z ręki lewej ile ich zostało w dłoni prawej. Oczywiście za każdym razem odwracamy się i nie widzimy przedmiotów, które ma kolega. Możemy teraz powiedzieć, że w lewej dłoni kolega ma $2a$ przedmiotów. Skąd to wiemy?

Przykład

Niech kolega weźmie po 15 zapałek. Poprośmy go o przełożenie z ręki prawej do lewej 7 zapałek. Po tej operacji w ręce lewej będą 22 zapałki w ręce prawej będzie 8 zapałek. Teraz kolega z ręki lewej odkłada 8 zapałek, więc pozostaje mu $2 \cdot 7 = 14$ zapałek.

Rozwiązanie

Aby wszystko stało się jasne prześledźmy przekładanie przedmiotów w zapisie algebraicznym.

ręka lewa

$$\begin{aligned} n \\ n + a \\ (n + a) - (n - a) = 2a \end{aligned}$$

ręka prawa

$$\begin{aligned} n \\ n - a \end{aligned}$$

34. Odgadywanie parzystości. Miech kolega weźmie do jednej ręki parzystą ilość przedmiotów, do ręki drugiej nieparzystą ilość przedmiotów. Poprośmy kolegę aby liczbę przedmiotów w ręce prawej pomnożył przez dowolną liczbę nieparzystą, liczbę przedmiotów w ręce lewej niech pomnoży przez dowolną liczbę parzystą. Jeżeli kolega poda nam sumę otrzymanych iloczynów będziemy wiedzieli, w której ręce ma parzystą, a w której nieparzystą liczbę przedmiotów. Dlaczego?

Przykład

Niech kolega do ręki prawej weźmie 5 zapalek, do ręki lewej 4 zapalki. Liczbę zapalek w ręce prawej niech kolega pomnoży przez 3 (otrzyma 15), w ręce lewej niech liczbę zapalek pomnoży przez 2 (otrzyma 8). Suma iloczynów wynosi 23 i na tej podstawie potrafimy wskazać, że w prawej ręce jest nieparzysta a w lewej parzysta liczba zapalek.

Rozwiązanie

Podobnie jak w poprzednim zadaniu prześledźmy zapis algebraiczny dokonanych operacji. Rozważmy dwa przypadki:

a) w ręce prawej jest parzysta ilość przedmiotów, w ręce lewej nieparzysta

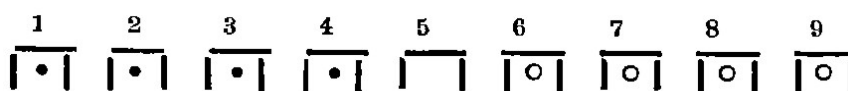
ręka prawa	ręka lewa
$2n$	$2k + 1$
$2n \cdot (2m + 1) = 4nm + 2n$	$(2k + 1) \cdot 2l = 4kl + 2l$
suma liczb $4nm + 2n + 4kl + 2l$ jest liczbą parzystą	

b) w ręce prawej jest nieparzysta ilość przedmiotów, w ręce lewej parzysta

ręka prawa	ręka lewa
$2k + 1$	$2n$
$(2k + 1)(2m + 1) = 4km + 2k + 2m + 1$	$2n \cdot 2l = 4nl$
suma liczb $4km + 2k + 2m + 1 + 4nl$ jest liczbą nieparzystą	

Z powyższego widać, że jeżeli w sumie otrzymamy liczbę parzystą to w prawej ręce będzie parzysta liczba przedmiotów. Jeżeli w sumie otrzymamy liczbę nieparzystą, to w prawej ręce będzie nieparzysta liczba przedmiotów.

35. W stajni znajduje się 9 koić. W pierwszych czterech stoją konie kare. Piąty koić jest pusty. W czterech ostatnich stoją konie białe. Należy przenieść konie kare na miejsce koni białych i odwrotnie. Przy czym można przenosić konie pojedynczo i tylko do pustego koića.



Rozwiązanie

Można zacząć albo od konia z kojca 6, albo od konia z kojca 4 przenosząc je do pustego kojca 5. W pierwszym przypadku zapis „przenosin” może wyglądać tak:

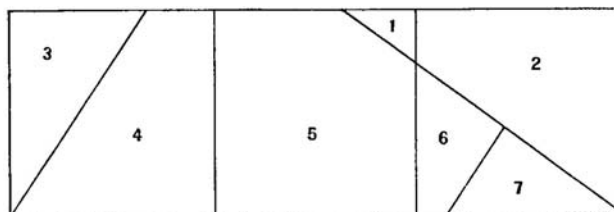
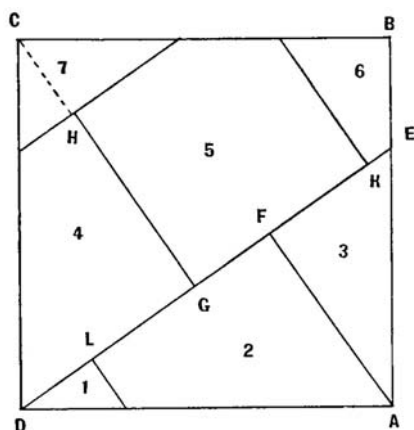
$6 \rightarrow 5$	$2 \rightarrow 4$	$4 \rightarrow 6$
$4 \rightarrow 6$	$1 \rightarrow 2$	$2 \rightarrow 4$
$3 \rightarrow 4$	$3 \rightarrow 1$	$3 \rightarrow 2$
$5 \rightarrow 3$	$5 \rightarrow 3$	$5 \rightarrow 3$
$7 \rightarrow 5$	$7 \rightarrow 5$	$7 \rightarrow 5$
$8 \rightarrow 7$	$9 \rightarrow 7$	$6 \rightarrow 7$
$6 \rightarrow 8$	$8 \rightarrow 9$	$4 \rightarrow 6$
$4 \rightarrow 6$	$6 \rightarrow 8$	$5 \rightarrow 4$

Proste, wydawałoby się, zadania geometryczne polegające na pocięciu jednej figury i złożeniu z kawałków innej figury, zawierają w sobie całkiem sporo matematyki. Niewiele można tu osiągnąć dzieląc „na oko”. Każde cięcie powinno być starannie przemyślane i uzasadnione. Aby się o tym przekonać proponujemy rozwiązać kilka poniższych zadań.

36. Dany kwadrat rozciąć na 7 części tak aby złożyć z nich trzy jednakowe kwadraty.

Rozwiązanie

Jeżeli kwadrat wyjściowy ma bok a , pole powierzchni a^2 , to każdy z trzech nowych kwadratów ma pole powierzchni $\frac{a^2}{3}$ i bok $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Przeprowadzamy następującą konstrukcję. Na boku AB odkładamy odcinek AE równy połowie długości przekątnej. Prowadzimy linię DE i na odcinek DE rzutujemy wierzchołki A (otrzymamy punkt F) oraz C (otrzymamy punkt G), zauważmy, że oba rzuty znajdują się wewnątrz kwadratu. Rzuty łączymy z rzutowanymi wierzchołkami. Na otrzymanych odcinkach odkładamy odcinki GH, GK, FL wszystkie równe AF. Przez punkt H prowadzimy równoległą do DE. Przez L i K prowadzimy równoległe do AF. Otrzymane linie są liniami cięcia wyjściowego kwadratu, z tak otrzymanych części składamy 3 kwadraty mniejsze.



Uzasadnijmy, że tak jest w istocie. Sprawdźmy czy AF ma długość $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Skorzystamy z twierdzenia Pitagorasa oraz podobieństwa trójkątów AED oraz AEF (cecha kkk).

Ponieważ AE jest połową przekątnej kwadratu o boku a ma długość $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Policzmy długość DE.

$$DE^2 = a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = a^2 + \frac{a^2}{2} = \frac{3a^2}{2} \Rightarrow DE = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

Trójkąty AED oraz AEF są podobne, mają więc proporcjonalne odpowiednie boki.

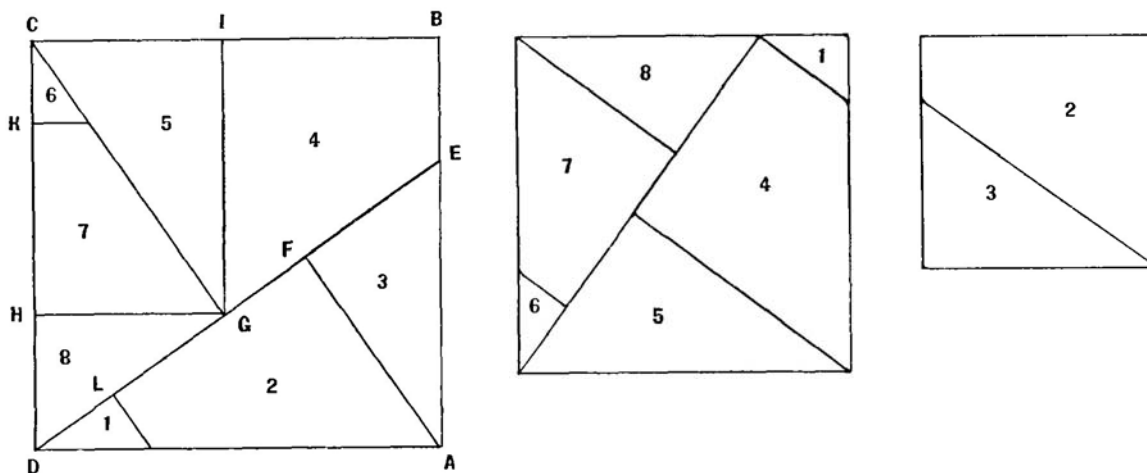
$$\frac{DE}{DA} = \frac{AE}{AF} \Rightarrow AF = \frac{DA \cdot AE}{DE} \Rightarrow AF = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} = \frac{a^2 \sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Można pokazać, że siedem jest najmniejszą liczbą części, które po złożeniu dadzą trzy jednakowe kwadraty.

37. Dany kwadrat rozciąć na 8 części tak aby złożyć z nich dwa kwadraty, przy czym jeden z otrzymanych kwadratów ma być dwa razy większy od drugiego (oczywiście chodzi o pole powierzchni).

Rozwiązanie

Podobnie jak w poprzednim zadaniu znajdujemy punkty F, G, L oraz kreślimy odcinki FA oraz CG. Z punktu G kreślimy prostopadłe do CB oraz CD, znajdując w ten sposób punkty I, H. Na koniec znajdujemy punkt K taki, że GH=HK.



To, że po złożeniu części powstał większy kwadrat widać z trójkątów o numerach 5, 6, 7. Kwadrat mniejszy widoczny jest natychmiast. Należy pokazać, że pole powierzchni kwadratu większego jest podwojonym polem kwadratu mniejszego.

Zauważmy, że trójkąt AFD jest przystający do trójkąta DGC (trójkąty prostokątne o jednakowych przeciwprostokątnych). Stąd wnioskujemy, że $AF=DG$, czyli

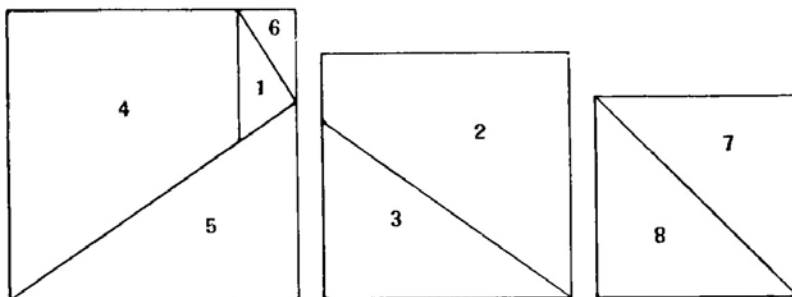
$DG = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ (zadanie poprzednie). Z twierdzenia Pitagorasa możemy policzyć, że

$CG^2 = \frac{2}{3}a^2$. Skoro pole większego kwadratu równa się $\frac{2}{3}$ pola kwadratu wyjściowego, to pole mniejszego kwadratu wynosi $\frac{1}{3}a^2$ (bo suma tych pól równa jest a^2). Pokazaliśmy tym samym, że kwadrat większy ma dwa razy większe pole od kwadratu mniejszego. Nasza konstrukcja została uzasadniona.

38. Dany kwadrat rozciąć na 8 części, tak aby można było złożyć z nich kwadraty, których pola są proporcjonalne do liczb 2, 3, 4.

Rozwiązanie

Należy dokonać cięć jak w zadaniu poprzednim. Sposób złożenia kwadratów pokazuje rysunek. W poprzednim zadaniu policzyliśmy, że pole środkowego kwadratu wynosi $\frac{1}{3}a^2$ jest więc propor-



cjonalne do liczby 3 (współczynnik proporcjonalności równa się $9a^2$). Policzmy pole lewego kwadratu. Wykorzystamy w tym celu wyniki dwóch zadań poprzednich. Trójkąt GIC jest podobny (nawet przystający) do trójkąta GCH, ten z kolei jest podobny do trójkąta GCD. Stąd wnioskujemy, że podobne są trójkąty GIC oraz GCD. Wobec tego prawdziwe są równości:

$$\frac{CG}{GI} = \frac{CD}{CG} \Rightarrow GI \cdot CD = CG^2 \Rightarrow GI = \frac{CG^2}{CD} = \frac{\frac{2}{3}a^2}{a} = \frac{2}{3}a$$

Wobec powyższego pole pierwszego kwadratu wynosi $\frac{4}{9}a^2$ i jest proporcjonalne do liczby 2. Pole najmniejszego kwadratu wynosi $a^2 - \frac{1}{3}a^2 - \frac{4}{9}a^2 = \frac{2}{9}a^2$. Jest więc dwa razy mniejsze od pola największego i proporcjonalne do liczby 4.

39. Trzy niedźwiadki znalazły skład miodu. W składzie było 21 jednakowych słoików w tym: 7 pełnych miodu, 7 do połowy napełnionych oraz 7 pustych. Jak misie mają podzielić miód między siebie znalezisko aby każdy otrzymał równą ilość miodu i równą ilość słoików? Nie można miodu przelewać ze słoika do słoika.

Rozwiązanie

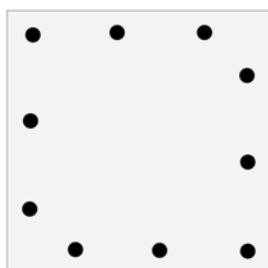
Oczywiście na każdego misia przypada 7 słoików. Gdyby można było miód przelewać to do 7 pustych słoików nalelibyśmy do połowy miód z 7 pełnych słoików co by dawało łącznie 21 słoików pełnych do połowy. Oznacza to że na każdego misia przypada $\frac{7}{2}$ słoików miodu. Możemy teraz zaproponować dwa podziały:

	słoi pełnych	Słoi w połowie pełnych	słoi pustych	razem miodu	razem słoi
miś 1	2	3	2	$2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$	7
miś 2	2	3	2	$2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$	7
miś 3	3	1	3	$3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$	7

	słoi pełnych	słoi w połowie pełnych	słoi pustych	razem miodu	razem słoi
miś 1	3	1	3	$3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$	7
miś 2	3	1	3	$3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$	7
miś 3	1	5	1	$1 + \frac{5}{2} = \frac{7}{2}$	7

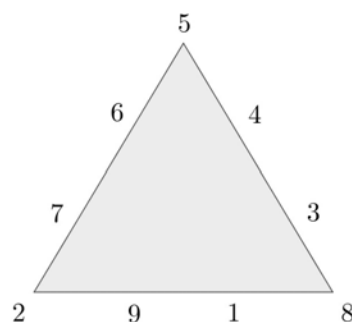
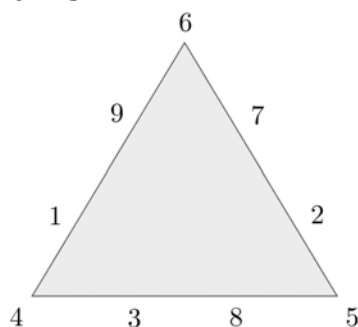
40. W kwadratowej sali rozstawić pod ścianami 10 krzeseł tak aby przy każdej ścianie stały 3 krzesła.

Rozwiązanie



41. Mamy zbiór liczb $\{1, 2, \dots, 9\}$ należy rozmieścić je wzdłuż boków trójkąta tak, aby suma liczb wzdłuż każdego boku wynosiła 20.

Rozwiązanie



42. Pociąg pośpieszny wyjechał z Gdańska do Warszawy i jedzie z prędkością 100 km/h bez przystanków. W tym samym czasie z Warszawy do Gdańska wyjechał

ekspres i jedzie z prędkością 140 km/h również bez przystanków. W jakiej odległości będą te dwa pociągi od siebie na pół godziny przed spotkaniem?

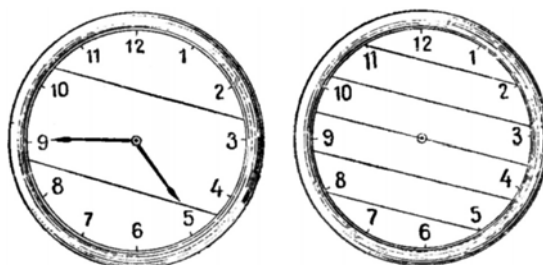
Rozwiązanie

Pociągi względem siebie poruszają się z prędkością 240 km/h. Na pół godziny przed spotkaniem będą w odległości 120 km od siebie.

43. Dwiema liniami rozdzielić godziny na cyferblacie zegarka na trzy części, tak aby w każdej grupie suma liczb była równa. Pięcioma liniami rozdzielić godziny na cyferblacie zegarka na sześć części, tak aby w każdej grupie suma liczb była równa.

Rozwiązanie

Suma liczb cyferblatu wynosi $1+2+\dots+12 = \frac{12 \cdot 13}{2} = 78$. Dzieląc to na 3 części dostajemy w każdej części 26. Podobnie dzieląc na 6 części dostajemy 13. Szukane podziały pokazuje rysunek poniżej.



44. Nie używając kalkulatora porównaj sumy liczb w kolumnach po prawej stronie. W, której kolumnie suma liczb jest większa?

123456789	000000001
123456780	000000021
123456700	000000321
123456000	000004321
123450000	000054321
123400000	000654321
123000000	007654321
120000000	087654321
100000000	987654321

Rozwiązanie

Obie kolumny dają taką samą sumę 1 083 676 269. Nie trzeba sumować liczb, żeby się o tym przekonać. Wystarczy zauważyć, że mamy odpowiednio w kolumnie lewej jedną dziewiątkę, w kolumnie prawej dziewięć jedynek. W kolumnie lewej dwie ósemki, w kolumnie prawej osiem dwójek. Itd. aż do dziewięciu jedynek w kolumnie lewej i jednej dziewiątki w kolumnie prawej. Pod każdym rzędem wielkości dostajemy w obu kolumnach taką samą sumę więc liczby w obu kolumnach sumują się do tej samej wartości.

45. U jednego przedszkolaka jest tyle sióstr ilu braci a u jego siostry braci jest dwa razy więcej niż sióstr. Ile braci i ile sióstr jest w tej rodzinie?

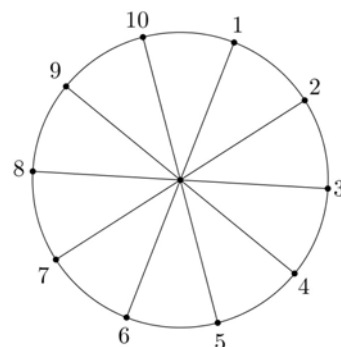
Rozwiązanie

Skoro u przedszkolaka jest tyle sióstr co braci, to razem z nim braci jest o 1 więcej niż sióstr. Jeżeli więc liczba sióstr zostanie oznaczona przez x , to braci jest $x+1$. Skoro u siostry braci jest dwa razy więcej niż sióstr to możemy ułożyć równanie:

$$2(x-1) = x+1 \Rightarrow x = 3$$

W rodzinie są 3 dziewczynki i 4 chłopców.

46. Na końcach pięciu średnic w okręgu rozmieszczono liczby 1, 2, ..., 10. Znaleźć takie rozmieszczenia dla których wszystkie sumy sąsiednich liczb będą równe sumie liczb stojących na drugim końcu średnicy. Na rysunku obok tylko dla jednej pary sąsiednich liczb zachodzi ta własność: $10+1=5+6$ ale już $10+9 \neq 5+4$. Istnieją takie rozmieszczenia, w których dla każdej pary sąsiednich liczb ma to miejsce.

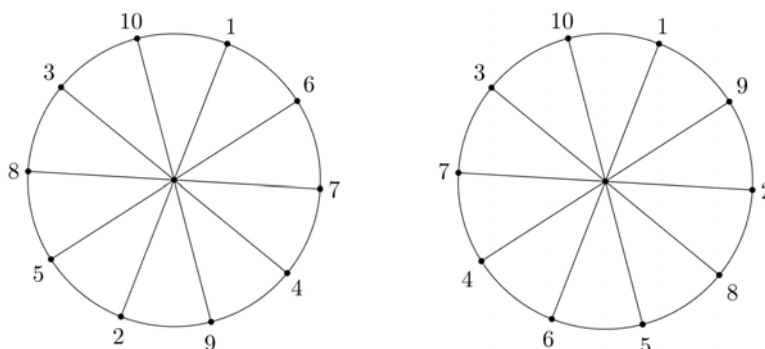


Rozwiązanie

Niech na jednej średnicy stoją liczby A, a na drugiej B, b . Warunek zadania oznacza, że: $A+B = a+b \Rightarrow A-a = b-B$ czyli liczby, które umieszczamy na średnicach mają mieć takie same różnice (zwracamy uwagę na znak). Skoro cecha ta ma dotyczyć wszystkich użytych liczb, to dla liczb ze zbioru $\{1, 2, \dots, 10\}$ mamy dwie możliwości.

- a) Różnica między liczbami wynosi 1, co daje pary: (10,9), (8,7), (6,5), (4,3), (2,1).
 b) Różnica między liczbami wynosi 5, co daje pary: (10,5), (9,4), (8,3), (7,2), (6,1).

Pary te należy odpowiednio ułożyć, żeby warunek sumy był spełniony. Przykładowe rozwiązanie pokazuje rysunek poniżej.



47. Przyjrzyjmy się działaniu: $2+2=2 \times 2$. Zauważmy, że zamieniając symbole działań miejscami wynik nie zmienia się. Podobną własność będzie miało działanie: $1+2+3=1 \times 2 \times 3$. Należy znaleźć podobną własność dla a) 4, b) 5 liczb.

Rozwiązanie

- a) $1+1+2+4=1 \times 1 \times 2 \times 4$
 b) $1+1+1+2+5=1 \times 1 \times 1 \times 2 \times 5$
 $1+1+1+3+3=1 \times 1 \times 1 \times 3 \times 3$
 $1+1+2+2+2=1 \times 1 \times 2 \times 2 \times 2$

48. Przed lub za cyfry należy wstawić odpowiednie działanie albo nawiasy, tak aby uzyskać właściwy wynik.

$$\begin{aligned}1\ 2 &= 1 \\1\ 2\ 3 &= 1 \\1\ 2\ 3\ 4 &= 1 \\1\ 2\ 3\ 4\ 5 &= 1 \\1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6 &= 1 \\1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7 &= 1 \\1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8 &= 1 \\1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9 &= 1\end{aligned}$$

Rozwiązanie

Jedno z możliwych rozwiązań:

$$\begin{aligned}-1 + 2 &= 1 \\(1 + 2) : 3 &= 1 \\1 \cdot (2 + 3 - 4) &= 1 \\1 + 2 - 3 - 4 + 5 &= 1 \\1 - 2 - 3 + 4 - 5 + 6 &= 1 \\(1 + 2) : 3 + (4 - 5 - 6 + 7) &= 1 \\(1 + 2) \cdot 3 + (4 - 5 - 6 + 7) - 8 &= 1 \\1 + 2 - 3 - 4 + 5 - (6 - 7) + 8 - 9 &= 1\end{aligned}$$

49. Podczas jazdy motocyklista zauważył, że na liczniku jego motoru liczba przejechanych kilometrów wynosi 15951. Jest to symetryczna liczba, która czytana od tyłu wynosi tyle samo. Hmm... pomyślał – za dwie godziny na liczniku będzie kolejna symetryczna liczba. Z jaką prędkością jechał motocyklista?

Rozwiązanie

Najbliższa liczba symetryczna przewyższająca 15951 to 16061. Różnica między nimi wynosi 110. Zatem motocyklista jechał z prędkością 55 km/h.

50. Jadąc kolejką elektryczną z miasta A do miasta B podróżny co 5 minut mija podmiejskie pociągi jadące w przeciwnym kierunku to jest z miasta B do miasta A. Ile pociągów w ciągu godziny wyjeżdża z miasta B skoro ruch trwa non stop z jednakowymi prędkościami w obydwu kierunkach?

Rozwiązanie

Pierwsza odpowiedź, która się narzuca $60 : 5 = 12$ pociągów jest błędna gdyż dotyczy ona przypadku kiedy obserwujemy mijające nas pociągi sami nie będąc w ruchu. Jeżeli minęliśmy pierwszy pociąg i po pięciu minutach drugi, to ten pierwszy jest w odległości 10 minut drogi od drugiego (i nasz i pierwszy pociąg przejechaliśmy drogi 5 minut w przeciwnych kierunkach). Wynika stąd, że w ciągu godziny z miasta B wyjeżdża $60 : 10 = 6$ pociągów.

51. Weźmy liczbę 23. Co należy wstawić pomiędzy 2 a 3 aby otrzymać liczbę większą od 2 i mniejszą od 3?

Rozwiązanie

Przecinek 2,3

52. Ułamek $\frac{1}{3}$ ma tę własność, że jak jego licznik i mianownik zwiększymy o mianownik, to wartość ułamka rośnie dwukrotnie:

$$\frac{1+3}{3+3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = 2 \cdot \frac{1}{3}$$

Należy znaleźć ułamki, w których zwiększenie licznika i mianownika o mianownik spowoduje zwiększenie ułamka trzykrotnie, czterokrotnie, ..., k – krotnie.

Rozwiązanie

Weźmy ułamek nieskracalny $\frac{a}{b}$. Po zwiększeniu licznika i mianownika o mianownik

otrzymamy ułamek $\frac{a+b}{2b}$ ma on być trzykrotnie większy od wyjściowego. Stąd:

$$\frac{a+b}{2b} = \frac{3a}{b} \Rightarrow a+b=6a \Rightarrow b=5a$$

Wystarczy podstawić $a=1$, otrzymamy ułamek $\frac{1}{5}$ i rzeczywiście $\frac{1+5}{5+5} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = 3 \cdot \frac{1}{5}$.

Zastosowaną metodę można uogólnić:

$$\frac{a+b}{2b} = \frac{ka}{b} \Rightarrow a+b=2ka \Rightarrow b=(2k-1)a$$

Jeżeli chcemy znaleźć ułamek, który zwiększy się 11 – krotnie po dodaniu do licznika i mianownika jego mianownika, należy przyjąć $k=11$, $a=1$. Rzeczywiście:

$$\frac{1+21}{21+21} = \frac{22}{42} = \frac{11}{21} = 11 \cdot \frac{1}{21}$$

53. Robimy grzanki opiekając chleb na patelni. Każdą stronę kromki opieka się 30 sekund. Patelnia mieści tylko 2 kromki. W jaki sposób w ciągu 1,5 minuty opiecz z obu stron trzy kromki chleba?

Rozwiązanie

1. Opiekamy 2 kromki, 1 strona, 30 sekund.

2. Jedną kromkę odkładamy na bok, drugą przekładamy na drugą stronę i dokładamy na zwolnione miejsce trzecią kromkę, 30 sekund.

3. Odkładamy kromkę opieczoną z dwóch stron, na puste miejsce kładziemy kromkę, którą wcześniej odłożyliśmy a na drugą stronę przekładamy kromkę, która zajęła jej miejsce, 30 sekund.

Po 1,5 minuty mamy gotowe 3 kromki grzanek.

54. Mamy nieuporządkowaną tablicę złożoną z 25 liczb. Możemy w jednym ruchu zamienić dwie liczby np. 1 i 7. Ile należy wykonać ruchów aby uporządkować tablicę rosnąco tzn. 1, 2, 3, ..., 25?

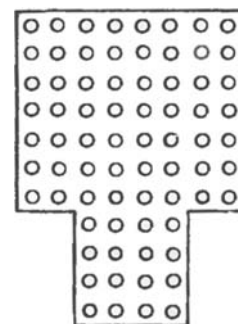
7	24	10	19	3
12	20	8	22	23
2	15	25	18	13
11	21	5	9	16
17	4	14	1	6

Rozwiązanie

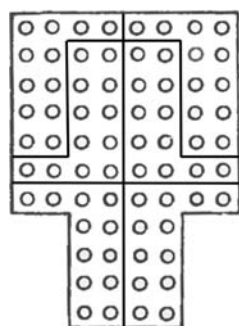
Najmniej należy wykonać 19 zamian:

1-7, 7-20, 20-16, 16-11, 11-2, 2-14,
3-10, 10-23, 23-14, 14-18, 18-5,
4-19, 19-9, 9-22,
6-12, 12-15, 15-13, 13-25,
17-21.

55. W jaki sposób podzielić figurę z rysunku obok na sześć figur przystających? Przypomnijmy, że figury są przystające jeżeli można je nałożyć na siebie przesuując je, lub obracając (figury przystające mają taki sam kształt i takie same wymiary).



Rozwiązanie

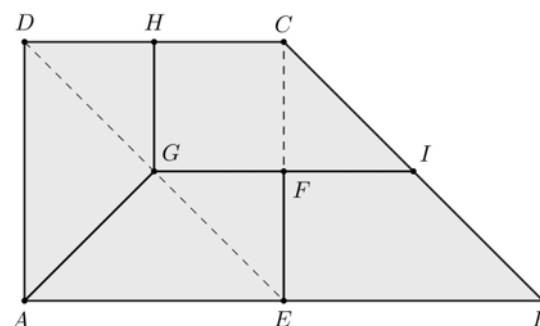
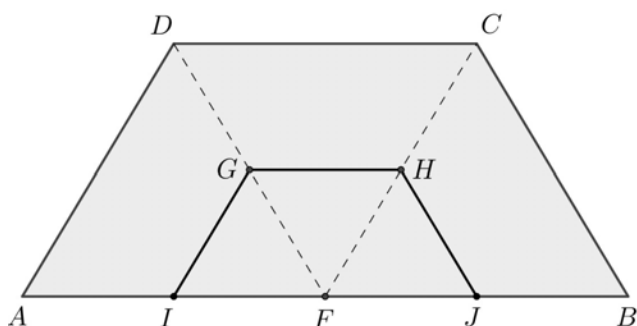


Aby ułatwić sobie rozwiązanie należy policzyć kółka. Jest ich 72. Wobec tego po podziale w każdej otrzymanej figurze powinno być 12.

56. Nie każdy trapez można podzielić na trapezy przystające. Można to zrobić w przypadku trapezów równoramiennych złożonych z trzech trójkątów równobocznych oraz w przypadku trapezów prostokątnych złożonych z trzech trójkątów równoramiennych. Zbuduj takie trapezy i każdy z nich podziel na cztery trapezy przystające.

Rozwiązanie

Trapez równoramienny $ABCD$ powstał z trzech trójkątów równobocznych AFD , FCD oraz FBC . Punkty I, J, H, G są środkami odcinków odpowiednio: AF, FB, FC, FD . Trapez prostokątny $ABCD$ powstał z trzech trójkątów równoramiennych AED , ECD oraz EBC . Punkty H, G, F, I są środkami odcinków odpowiednio: DC, DE, CE, AB .



57. Mając do dyspozycji wagę szalkową i dwa odważniki o wagach 50 gram i 200 gram, podzielić trzema ważeniami paczkę cukru. Paczka waży 9 kg a części mają ważyć 2 kg i 7 kg.

Rozwiązanie

1. Dzielimy cukier na dwie równe części, na wadze szalkowej robimy to bez odważników. Otrzymamy 2 części po 4,5 kg.
2. Jedną z otrzymanych części dzielimy ponownie na pół. Po połączeniu mamy części po 6,75 kg i 2,25 kg.
3. Od części 2,25 odsypujemy 250 gram (mamy takie odważniki).