

2. Liczby i działania.

Zadanie 30

Weźmy ułamek dziesiętny, którego wszystkie cyfry tworzą ciąg kolejnych liczb naturalnych $0.123456789101112131415\dots$. Należy pokazać, że nie jest to ułamek okresowy.

Rozwiązanie

Założmy przeciwnie, że jest to ułamek o okresie długości n , który po raz pierwszy wystąpi od pozycji m . W takim razie, co n cyfr będzie się w nim powtarzać jakaś cyfra $k \neq 0$. Ponieważ w naszym ułamku występują dowolnie duże liczby naturalne, wystąpi też w nim liczba, która składa się z $(m+n+1)$ cyfr $(k-1)$ i wtedy po n cyfrach trafimy na $k-1$, a nie na k .

Zadanie 31

Wypisujemy po kolei wszystkie liczby naturalne od 1 do 60. Z utworzonej liczby $1234\dots5960$ skreślamy 100 cyfr w taki sposób aby powstała liczba jak najmniejsza. Jaka to liczba?

Rozwiązanie

Po pierwsze zauważmy, że powstała liczba ma 111 cyfr (składa się z 51 liczb dwucyfrowych oraz 9 jednocyfrowych). Aby spełnić warunki zadania skreślimy w pierwszym przybliżeniu największe cyfry. Łatwo policzyć, że w naszej liczbie jest między innymi 6 zer i 16 jedynek, dlatego po skreśleniu największych cyfr pozostanie 6 zer i 5 jedynek (miało zostać 11 cyfr, bo 100 skreślamy). Powstała liczba z przerwami po skreśleniach będzie wyglądać tak:

$$01\dots01\dots01\dots01\dots\mathbf{01\dots0} \quad (*)$$

najmniej znacząca, ostatnia grupa (wytyłuszczona) $01\dots0$ powstała po skreśleniu cyfr z grupy:

$$\mathbf{5051525354555657585960} \quad (**)$$

(niewykreślone cyfry wytyłuszczono). Aby zmniejszyć dodatkowo liczbę $(*)$ należy skreślić z niej najbardziej znaczące jedynek i zastąpić je (ponownie wpisać) najmniejszymi cyframi z grupy $(**)$, otrzymamy wtedy następującą liczbę:

$$0\dots0\dots0\dots0\dots012345\dots0$$

Zadanie spełnia zatem liczba 00000123450 , po pominięciu zer (wszak $0023=23$) mamy 123450 .

Zadanie 32

Weźmy liczby od 0 do 9999999. Niektóre z nich zawierają w zapisie cyfrę 1, inne nie. Których liczb jest więcej?

Rozwiązanie

Liczby, które mają mniej niż 7 cyfr możemy uważać za 7 cyfrowe z zerami z przodu np. 0001234=1234. Policzmy ile jest wszystkich liczb 7 cyfrowych w ten sposób rozumianych. Na każdej z siedmiu pozycji może stać jedna z 10 cyfr $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ otrzymujemy więc:

$$\underbrace{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \dots \cdot 10}_7 = 10^7 = 10000000$$

Liczb 7 cyfrowych nie zawierających cyfry 1 będzie:

$$\underbrace{9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 9}_7 = 9^7 = 4782969$$

Ponieważ na każdej z siedmiu pozycji może stać jedna z 9 cyfr (0, 2, 3, ..., 9). W takim razie liczb z cyfrą 1 otrzymamy:

$$10000000 - 4782969 = 5217031$$

Jest ich więcej niż liczb bez cyfry 1.

Zadanie 33

Pokazać, że suma cyfr liczby:

$$4444^{4444} \quad (*)$$

jest mniejsza od 159984.

Rozwiązanie

Najpierw oszacujmy ilość cyfr liczby (*). Zauważmy, że dobrą metodą szacowania ilości cyfr liczby naturalnej n jest wykorzystanie logarytmów dziesiętnych. Jeżeli liczba naturalna n ma p cyfr to znaczy $n = a_{p-1} \cdot 10^{p-1} + a_{p-2} \cdot 10^{p-2} + \dots + a_1 \cdot 10^1 + a_0$, to spełnia nierówność $10^{p-1} \leq n < 10^p$ (np. skrajne przypadki to $10^3 \leq 1000 < 10^4$, $10^3 \leq 9999 < 10^4$). Logarytmując tę nierówność otrzymamy: $p-1 \leq \log n < p$. Ostatnia nierówność oznacza, że logarytm z liczby n jest z przedziału $[p-1, p)$ gdzie p to ilość cyfr liczby n zatem $p = [\log n] + 1$ (część całkowita, cecha logarytmu plus 1). Liczymy więc:

$$\log 4444^{4444} = 4444 \cdot \log 4444 \text{ ale } \log 4444 \approx 3,65 < 4 \Rightarrow 4444 \cdot \log 4444 < 4444 \cdot 4 = 17776$$

Liczba (*) ma maksymalnie 17776 cyfr, ponieważ 9 jest cyfrą największą więc suma cyfr liczby (*) nie przekroczy $9 \cdot 17776 = 159984$.

Zadanie 34

Udowodnić, że liczba dwustucyfrowa, w zapisie której na początku jest 100 jedynek a następnie 100 dwójek jest iloczynem liczb naturalnych.

Rozwiązanie

Liczba, o której mowa jest postaci:

$$S = \underbrace{11\dots11}_{100} \underbrace{22\dots22}_{100} = \underbrace{11\dots11}_{200} + \underbrace{11\dots11}_{100}$$

Każdą z tych sum możemy zapisać w postaci szeregu, dlatego:

$$S = (10^{199} + 10^{198} + \dots + 10^1 + 10^0) + (10^{99} + 10^{98} + \dots + 10^1 + 10^0)$$

Są to szeregi geometryczne o ilorazie $q = 10$ i pierwszym wyrazie 1, dlatego możemy je zsumować

$$S = \frac{10^{200} - 1}{9} + \frac{10^{100} - 1}{9}$$

Wprowadzimy oznaczenie $10^{100} = x$ i dokonamy paru przekształceń:

$$S = \frac{x^2 - 1}{9} + \frac{x - 1}{9} = \frac{(x-1)(x+1) + (x-1)}{9} = \frac{(x-1)(x+2)}{9} = \frac{10^{100} - 1}{3} \cdot \frac{10^{100} + 2}{3}$$

Należy jeszcze pokazać, że czynniki iloczynu są liczbami naturalnymi. Wynika to z tego, że pierwszy licznik to liczba złożona z samych cyfr 9 (więc podzielna przez 3). W drugim liczniku suma cyfr wynosi 3 (więc również mamy liczbę podzielną przez 3). W takim razie otrzymujemy iloczyn liczb naturalnych.

Zadanie 35

Znaleźć sumę cyfr wszystkich liczb naturalnych od 1 do 1000000.

Rozwiązanie

Usuńmy z naszego zbioru liczbę 1000000 (suma cyfr 1) a dodajmy 0 (które nie wpłynie na wynik). Wszystkie liczby od 0 do 999999 połączmy w pary:

$$(0; 999999), (1; 999998), (2; 999997), \dots, (499998; 500001), (499999; 500000)$$

Par jest 500000, suma cyfr każdej pary wynosi $6 \cdot 9 = 54$. Stąd suma wszystkich cyfr równa jest: $54 \cdot 500000 + 1 = 27000001$.

Zadanie 36

Wypisano wszystkie cyfry liczby 2^{1971} i zaraz za nimi wszystkie cyfry liczby 5^{1971} . Ile razem wypisano cyfr?

Rozwiązanie

Przyjmijmy, że liczba 2^{1971} ma m cyfr, liczba 5^{1971} ma n cyfr. W takim razie szukamy sumy $m + n$. Zauważmy, że $10^{m-1} < 2^{1971} < 10^m$ oraz $10^{n-1} < 5^{1971} < 10^n$. Stąd, po wymnożeniu (dodatnich) nierówności stronami otrzymamy:

$$10^{m+n-2} < 2^{1971} \cdot 5^{1971} < 10^{m+n} \Rightarrow 10^{m+n-2} < 10^{1971} < 10^{m+n}$$

$$\begin{cases} m+n-2 < 1971 \\ m+n > 1971 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m+n < 1973 \\ m+n > 1971 \end{cases} \Rightarrow m+n = 1972$$

Zadanie 37

Pokazać, że każda liczba postaci:

$$\underbrace{44\dots44}_{n}\underbrace{88\dots88}_{n}9 \quad (*)$$

jest kwadratem liczby naturalnej. Przykład: $44448889 = 6667^2$.

Rozwiązanie

a) Rozłóżmy liczbę $(*)$ na sumę $S = \underbrace{44\dots44}_{2n} + \underbrace{44\dots44}_{n} + 1$. Budujemy szereg

$$S = 4(10^{2n-1} + 10^{2n-2} + \dots + 10^0) + 4(10^{n-1} + 10^{n-2} + \dots + 10^0) + 1$$

Korzystamy ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego:

$$S = 4 \cdot \frac{10^{2n} - 1}{9} + 4 \cdot \frac{10^n - 1}{9} + \frac{9}{9}$$

Dla prostoty oznaczmy $10^n = x$, mamy:

$$S = \frac{4x^2 - 4 + 4x - 4 + 9}{9} = \left(\frac{2x+1}{3}\right)^2 = \left(\frac{2 \cdot 10^n + 1}{3}\right)^2$$

Ponieważ suma cyfr licznika dzieli się przez 3 to cały licznik dzieli się przez 3, zatem ułamek upraszcza się do liczby naturalnej.

Zadanie 38

Pokazać, że wśród liczb postaci: $1971\dots1971\underbrace{0\dots0}_4\underbrace{0\dots0}_4$ są liczby podzielne przez 1972.

Rozwiązanie

Wypiszmy ciąg liczb 1971, 19711971, ..., $\underbrace{1971\dots1971}_{1972}$ jak widać w ciągu tym są 1972

różne liczby niepodzielne przez 1972 (bo są nieparzyste). Dzieląc te liczby całkowicie przez 1972 będziemy otrzymywali reszty ze zbioru $\{1, 2, \dots, 1971\}$. Ponieważ liczb jest więcej niż reszt z dzielenia, dla pewnych liczb reszty będą takie same a to oznacza, że ich różnica będzie liczbą podzielną przez 1972. Różnica wyrazów wypisanego ciągu jest liczbą postaci $1971\dots1971\underbrace{0\dots0}_4\underbrace{0\dots0}_4$.

Zadanie 39

Mamy $n+1$ różnych liczb naturalnych mniejszych od $2n$. Należy pokazać, że można z nich wybrać taką trójkę liczb, w której jedna będzie równa sumie pozostałych.

Rozwiązanie

Ponieważ liczby są różne można ustawić je w ciąg rosnący $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n < a_{n+1}$ oprócz tego ciągu weźmy ciąg różnic $a_2 - a_1 < a_3 - a_2 < a_4 - a_3 < \dots < a_{n+1} - a_n$, zawiera on n różnych liczb naturalnych i każdy jego element również jest mniejszy od $2n$. Jeżeli połączymy oba ciągi to przynajmniej dwa elementy w ciągu połączonym muszą być równe (ponieważ mamy $2n+1$ elementów mniejszych od $2n$). Przy czym jeden z równych elementów musi należeć do pierwszego a drugi do drugiego z połączonych ciągów (bo w ramach tego samego ciągu wszystkie elementy są różne). Mamy więc $a_k = a_m - a_n$ co oznacza, że $a_k + a_n = a_m$.

Zadanie 40

Czy wśród potęg liczby 3 znajdują się takie, których zapis dziesiętny zakończony jest grupą cyfr ...0001?

Rozwiązanie

Rozpatrzmy ciąg 10000 potęg liczby 3 tzn. $3, 3^2, 3^3, \dots, 3^{10000}$. Żadna z liczb tego ciągu nie dzieli się przez 10000 (ponieważ są nieparzyste). Dzieląc łącznie te liczby przez 10000 otrzymamy reszty od 1 do 9999. Ponieważ liczb jest więcej niż reszt, więc znajdują się dwie takie, że podzielone przez 10000 dadzą jednakowe reszty. W takim razie ich różnica będzie podzielna przez 10000. Mamy więc $3^m - 3^n = k \cdot 10000$ stąd $3^n(3^{m-n} - 1) = k \cdot 10000$. Ponieważ 3^n nie dzieli się przez 10000, musi zajść $3^{m-n} - 1 = l \cdot 10000$ co oznacza, że $3^k = l \cdot 10000 + 1$ więc istnieje potęga trójki, która kończy się ciągiem cyfr ...0001.

Zadanie 41

W zapisie dziesiętnym pewnej liczby na pozycji pierwszej (najbardziej znaczącej) stoi cyfra, która jest równa ilości cyfr „zero” zapisu. Na pozycji drugiej stoi cyfra, która jest równa ilości cyfr „jeden” zapisu. Na pozycji trzeciej cyfra równa ilości „trójek” itd. aż do pozycji dziesiątej. Jaka to liczba?

Rozwiązanie

Oznaczmy przez a_i kolejne cyfry zapisu dziesiętnego, mamy $a_1 + a_2 + \dots + a_{10} = 10$ (z warunków zadania suma cyfr jest równa ilości cyfr). Zer w zapisie liczby jest $a_1 > 0$ (liczba nie może rozpoczynać się od 0). Cyfra a_1 oraz zera zajmują $a_1 + 1$ pozycji i w sumie cyfr dają a_1 . Na pozostałe cyfry zostaje $9 - a_1$ pozycji (bo cała liczba ma 10 pozycji), które w sumie cyfr dają liczbę $10 - a_1$ (bo zera i ich liczba dawały sumę cyfr a_1). Widzimy, że suma cyfr jest o 1 większa od ilości cyfr, jest to możliwe tylko w przypadku gdy jedną cyfrą jest 2 (czyli $a_3 = 1$), pozostałe cyfry to 1, których jest $a_2 = 8 - a_1$. Mamy zatem $a_1 + a_2 + a_3 = 9$ dlatego wśród pozostałych cyfr jest jedna cyfra 1, co łącznie daje dwie jedynki (bo $a_3 = 1$), czyli $a_2 = 2$, stąd $a_1 = 6$, $a_6 = 1$. Szukana liczba to 6210010000.

Zadanie 42

Wypiszmy⁶ n kolejnych liczb naturalnych począwszy od 1 do n a następnie od $n-1$ liczb od $n-1$ do 1. Pokazać, że suma wypisanych liczb jest kwadratem liczby n .

Przykład: $1+2+3+4+5+4+3+2+1=25=5^2$

Rozwiązanie

Wystarczy skorzystać ze wzoru Gaussa na sumę n kolejnych liczb naturalnych, raz dla n liczb i drugi raz dla $n-1$ liczb:

$$S = 1+2+\dots+n+n-1+\dots+1 = (1+2+\dots+n) + (n-1+\dots+1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n}{2}$$

$$S = \frac{n(n+1+n-1)}{2} = \frac{n \cdot 2n}{2} = n^2$$

Zadanie 43

Znaleźć liczbę naturalną n jeżeli wiadomo, że z trzech poniższych zdań dwa są prawdziwe a jedno fałszywe.

4. $n+51$ jest kwadratem liczby naturalnej,
5. Ostatnią cyfrą liczby n jest 1,
6. $n-38$ jest kwadratem liczby naturalnej.

Rozwiązanie

Ustalmy po pierwsze, które zdania są prawdziwe. Zdania 1. i 2. nie mogą być oba prawdziwe ponieważ oznaczałoby to, że liczba $n+51$ (będąca kwadratem) kończy się cyfrą 2, co nie jest możliwe. W takim razie prawdziwe jest zdanie 3. Zdanie 2. nie może być prawdziwe, bo zestawienie z prawdziwym zdaniem 3. oznaczałoby, że kwadrat liczby kończy się cyfrą 3, co nie jest możliwe. Prawdziwe są zatem zdania 1. i 3. Z warunków zadania mamy $n+51=k^2$ oraz $n-38=l^2$. Odejmując stronami otrzymamy $k^2-l^2=89$. A stąd $(k+l)(k-l)=89$. Zauważmy, że 89 jest liczbą pierwszą dlatego musi być:

$$\begin{cases} k+l=1 \\ k-l=89 \end{cases} \vee \begin{cases} k+l=89 \\ k-l=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=45 \\ l=44 \end{cases} \Rightarrow n=1974$$

Zadanie 44

Udowodnić, że jeżeli suma dwóch kwadratów liczb całkowitych jest podzielna przez 3, to i te liczby są podzielne przez 3.

Rozwiązanie

Oznaczmy liczby, o których mowa przez x, y . Można je zapisać w postaci $x=3k+r_1$, $y=3l+r_2$ gdzie reszty z dzielenia $r_1, r_2 \in \{0,1,2\}$. Z warunków zadania liczba:

$$x^2 + y^2 = (3k+r_1)^2 + (3l+r_2)^2 = 9k^2 + 6kr_1 + r_1^2 + 9l^2 + 6lr_2 + r_2^2$$

⁶ Zwykle robi to się na okręgu i wtedy taki okrąg nazywany jest **kręgiem pitagorejskim**.

jest podzielna przez 3. Wobec tego $r_1^2 + r_2^2$ też dzieli się przez 3. Biorąc pod uwagę zbiór, do którego należą reszty, wnioskujemy, że $r_1^2 + r_2^2 = 0$. Stąd $r_1 = 0$ i $r_2 = 0$ co oznacza, że x i y dzielą się przez 3.

Zadanie 45

Pokazać, że liczba $\frac{7^{1968^{1970}} - 3^{68^{70}}}{10}$ jest całkowita.

Rozwiązanie

Zauważmy, że potęgując liczbę zakończoną cyfrą 8 otrzymamy wynik zakończony cyframi $\{8, 4, 2, 6\}$, co 4 ta sama cyfra się powtarza. Podzielmy całkowicie wykładniki $1970 = 492 \cdot 4 + 2$ oraz $70 = 17 \cdot 4 + 2$. Oznacza to, że potęgi ósemki o tych wykładnikach będą zakończone cyfrą 4. W takim razie będą przez 4 podzielne. Zauważmy ponadto, że potęgując liczbę 7 otrzymamy wynik zakończony cyframi $\{7, 9, 3, 1\}$, przy czym $7^{4k} = \dots 1$. Potęgując liczbę 3 otrzymamy wynik zakończony cyframi $\{3, 9, 7, 1\}$, przy czym $3^{4k} = \dots 1$. Wynika stąd, że w mianowniku mamy różnicę dwóch liczb (pierwsza jest większa od drugiej) zakończonych cyfrą $\dots 1$ to znaczy różnica ta będzie zakończona cyfrą $\dots 0$ a to jest liczba podzielna przez 10.

Zadanie 46

Znaleźć najmniejszą liczbę naturalną, zakończoną cyfrą 6, która przy przeniesieniu tej cyfry na pierwszą pozycję zwiększa się czterokrotnie.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez x liczbę, która powstanie z szukanej przez nas liczby po usunięciu ostatniej cyfry 6. Przez y oznaczmy szukaną liczbę. Otrzymamy $y = 10x + 6$. Załóżmy ponadto, że szukana liczba ma n cyfr. Z warunków zadania otrzymamy równanie $4(10x + 6) = 6 \cdot 10^n + x$. Wyznaczamy x :

$$x = \frac{2(10^n - 4)}{13}$$

Ta liczba ma być całkowita. Szukamy więc najmniejszej liczby postaci $10^n - 4$, która dzieli się przez 13. Liczby tej postaci tworzą ciąg: 6, 96, 996, 9996, 99996, ... Łatwo się przekonać, że najmniejszą liczbą z tego ciągu podzielną przez 13 jest $99996 = 13 \cdot 7692$, wobec tego $x = 15384$ a $y = 153846$.

Zadanie 47

Pokazać, że nie istnieje liczba całkowita różna od zera, która zwiększa się dwukrotnie po przestawieniu pierwszej jej cyfry na ostatnią pozycję.

Rozwiązanie

Ponieważ ilość cyfr w liczbie po przestawieniu nie zmieni się, dlatego pierwsza cyfra nie może być większa od 4 (bo iloczyn liczby zaczynająca się od 5 oraz liczby 2 ma więcej cyfr niż miał czynnik). Pierwszą cyfrą nie może być 3, bo po przestawieniu otrzyma się liczbę nieparzystą (więc nie dwukrotnie większą). W takim razie pierwsza

cyfra może być ze zbioru $\{2, 4\}$. Biorąc to pod uwagę otrzymujemy dwa możliwe przypadki równań:

$$2a_1a_2 \dots a_n \times 2 = a_1a_2 \dots a_n 2 \quad (*)$$

$$4a_1a_2 \dots a_n \times 2 = a_1a_2 \dots a_n 4 \quad (**)$$

gdzie $a_1 \dots a_n$ oznaczają pozostałe cyfry liczby.

W przypadku (*) $a_n = 1$ lub $a_n = 6$ (bo pomnożone przez 2 daje ostatnią cyfrę 2). Jeżeli przyjmiemy $a_n = 1$ to iloczyn po lewej stronie (*) nie będzie podzielny przez 4 (bo jeden czynnik jest nieparzysty), liczba po prawej stronie (*) jako zakończona cyframi ...12 będzie podzielna przez 4. Jeżeli przyjmiemy $a_n = 6$ to sytuacja jest odwrotna, z lewej strony iloczyn będzie podzielny przez 4, liczba z prawej nie (bo jest zakończona cyframi ...62). W takim razie przypadek (*) nie daje poszukiwanej liczby.

W przypadku (**) rozumiemy podobnie, $a_n = 2$ lub $a_n = 7$. Jeżeli przyjmiemy $a_n = 2$, to ustalimy, że $a_{n-1} = 1$ lub $a_{n-1} = 6$ (bo $\dots a_{n-1} 2 \times 2 = \dots 24$). Dla $a_{n-1} = 1$ iloczyn po lewej stronie (**) dzieli się przez 8, liczba po stronie prawej (**) nie dzieli się przez 8 (końcówka ...124). Dla $a_{n-1} = 6$ po lewej stronie iloczyn nie dzieli się przez 8, liczba po prawej stronie dzieli się (końcówka ...64). Jeżeli przyjmiemy $a_n = 7$, to ustalimy, że $a_{n-1} = 3$ lub $a_{n-1} = 8$ (bo $\dots a_{n-1} 7 \times 2 = \dots 74$). Dla $a_{n-1} = 3$ iloczyn po stronie lewej (**) nie dzieli się przez 4, liczba po stronie prawej (**) dzieli się przez 4. Dla $a_{n-1} = 8$ jest podobnie. Przypadek (**) również nie daje liczby spełniającej warunki zadania. Wniosek – taka liczba nie istnieje.

Zadanie 48

Weźmy 100 dowolnych, różnych liczb naturalnych. Pokazać, że wśród tych liczb zawsze można znaleźć takie, których suma kończy się dwoma zerami.

Rozwiązanie

Oznaczmy liczby $n_1, n_2, \dots, n_{100}$. rozpatrzmy sumy $s_1 = n_1$, $s_2 = n_1 + n_2$, $s_3 = n_1 + n_2 + n_3$, $s_4 = n_1 + n_2 + n_3 + n_4$, ... Jeżeli wśród tych sum żadna nie dzieli się przez 100, to w dzieleniu przez 100 daje resztę od 1 do 99. Ponieważ sum jest więcej niż reszt to znajdą się takie dwie, które dają jednakową resztę. Niech to będzie s_k i s_l gdzie $k > l$ wtedy $s_k - s_l = n_{l+1} + n_{l+2} + \dots + n_{k-1} + n_k$ dzieli się przez 100.

Zadanie 49

Pokazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n można znaleźć liczbę naturalną dzielącą się przez n , która składa się tylko z zer i jedynek.

Rozwiązanie

Rozpatrzmy ciąg potęg $10, 10^2, 10^3, \dots$ dla dowolnego n znajdą się w tym ciągu dwie takie liczby, które podzielone przez $9n$ dadzą jednakowe reszty. Różnica tych liczb będzie dzieliła się przez $9n$. Mamy więc liczbę postaci:

$$\frac{10^k - 10^l}{9n} = \frac{10^l(10^{k-l} - 1)}{9n} = \frac{10^l \cdot \underbrace{99 \dots 99}_{k-l}}{9n} = \frac{\underbrace{11 \dots 11}_{k-l} \cdot 10^l}{n}$$

która jest naturalna i dzieli się przez n .

Zadanie 50

Weźmy liczby naturalne w zapisie których występują tylko jedynek 1, 11,..., 11...1. Znaleźć najmniejszą taką liczbę dzielącą się przez liczbę złożoną ze stu trójek $\underbrace{33 \dots 3}_{100}$.

Rozwiązanie

Rozłóżmy dzielnik następująco $3 \cdot \underbrace{11 \dots 11}_{100}$. Aby liczba złożona z samych jedynek dzieli-

ła się przez ten iloczyn musi spełniać dwa warunki. Liczba jedynek w zapisie musi być wielokrotnością stu (ponieważ ma się dzielić przez $\underbrace{11 \dots 11}_{100}$) oraz suma wszystkich je-

dynek ma się dzielić przez 3 (cecha podzielności przez 3). Najmniejsza liczba, która spełnia te warunki to 300. Wobec tego szukana liczba w zapisie składa się z 300 jedynek $\underbrace{11 \dots 1}_{300}$.

Zadanie 51

Z ciągu 1, 2, 3, ..., 200 wybieramy dowolnie 101 liczb. Pokazać, że wśród wybranych liczb znajdują się dwie takie, że jedna dzieli drugą.

Rozwiązanie

Zauważmy, że każdą liczbę naturalną można zapisać w postaci $2^k \cdot l$ gdzie l jest liczbą nieparzystą. Wybierając 101 liczb postaci $2^k \cdot l$ zawsze znajdziemy przynajmniej dwie, które mają jednakowy czynnik nieparzysty l (bo różnych liczb nieparzystych wśród dwustu kolejnych liczb jest 100). W takim razie dla tych liczb otrzymamy

$$\frac{2^k \cdot l}{2^m \cdot l} = 2^{k-m} \text{ jeżeli } k < m \text{ bierzemy iloraz odwrotny.}$$

Zadanie 52

Napiszmy liczbę $35! = 10333147966386144929\mathbf{A}66651337523200000000$. Należy w miejsce **A** wstawić właściwą cyfrę.

Rozwiązanie

Policzmy sumę wypisanych cyfr, wynosi ona $138 + A$. Ponieważ wartość liczzonej silni ma się dzielić przez 9 (silnia oznacza iloczyn kolejnych liczb naturalnych), dlatego suma ta ma się dzielić przez 9, co jest możliwe dla $A=6$.

Zadanie 53

Znaleźć wszystkie liczby dwucyfrowe, których kwadrat równy jest sześciangowi sumy ich cyfr.

Rozwiązanie

Oznaczmy zapis liczby dwucyfrowej przez xy . Z warunków zadania mamy:

$$(10x + y)^2 = (x + y)^3 \Rightarrow \left(\frac{10x + y}{x + y} \right)^2 = x + y \Rightarrow \left(\frac{9x}{x + y} + 1 \right)^2 = x + y$$

Ponieważ x, y to cyfry, suma po prawej stronie może być liczbą naturalną od 2 do 18. Wśród tych liczb kwadratami są tylko: 4, 9, 16. Po podstawieniu otrzymujemy:

Dla $x + y = 4$ mamy: $\left(\frac{9x}{4} + 1 \right)^2 = 4 \Rightarrow \frac{9x}{4} = 1$, sprzeczność.

Dla $x + y = 16$ mamy: $\left(\frac{9x}{16} + 1 \right)^2 = 16 \Rightarrow \frac{9x}{16} = 3$, sprzeczność.

Dla $x + y = 9$ mamy: $\left(\frac{9x}{9} + 1 \right)^2 = 9 \Rightarrow \frac{9x}{9} = 2 \Rightarrow x = 2, y = 7$. Szukana liczba to 27.

Zadanie 54

Pokazać, że liczba $11^n - 3^n$ dzieli się przez 8.

Rozwiązanie

Tego typu zadania najłatwiej dowodzić metodą indukcji⁷. Sprawdzamy, że $11^1 - 3^1 = 8$ dzieli się przez 8. Zakładamy prawdziwość tezy dla elementu n i przeprowadzamy dowód indukcyjny dla elementu $n + 1$:

$$11^{n+1} - 3^{n+1} = 11 \cdot 11^n - 3 \cdot 3^n = 11 \cdot 11^n - 8 \cdot 3^n + 8 \cdot 3^n = 11(11^n - 3^n) + 8 \cdot 3^n$$

Pierwszy składnik sumy po prawej stronie dzieli się przez 8 na podstawie założenia indukcyjnego, drugi dzieli się w sposób oczywisty. W takim razie przez 8 dzieli się cała suma a co za tym idzie różnica po lewej stronie.

Zadanie 55

Czy istnieje takie n dla którego liczba $n^2 + n + 1$ (*) dzieli się przez 7955?

Rozwiązanie

Liczba 7955 posiada jako jeden z czynników liczbę 5. Wobec tego (*) powinna dzielić się przez 5. Rozpatrzmy jaką cyfrą zakończona jest liczba (*) w zależności od cyfry kończącej liczbę n :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n^2 + n + 1$	1	3	7	3	1	1	3	7	3	1

⁷ Metoda indukcji matematycznej została dokładnie omówiona w dodatku.

Z powyższego wynika, że liczba (*) w żadnym przypadku nie jest zakończona 0 lub 5, zatem nie dzieli się przez 5. Szukane n nie istnieje.

Zadanie 56

Wypisano po kolei k różnych liczb naturalnych. Pokazać, że zawsze znajdzie się taki fragment tego zapisu, że suma wybranych liczb dzieli się przez k .

Rozwiązanie

Oznaczmy wypisane liczby przez $a_1, a_2, \dots, a_k$ utwórzmy ciąg k sum:

$$a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots, a_1 + a_2 + \dots + a_k \quad (*)$$

Jeżeli jedna z sum ciągu (*) dzieli się przez k dowód jest zakończony, jeżeli nie to sumy (*) dzielone przez k dadzą reszty $1, 2, \dots, k-1$. Ponieważ sum jest więcej niż reszt przynajmniej dwie sumy muszą dać tę samą resztę. Różnica tych sum:

$$a_m + a_{m-1} + \dots + a_{m-l}$$

dzieli się przez k i składa się z fragmentu naszego zapisu.

Zadanie 57

Liczby naturalne od 1 do 10 ustawiono w dowolnym porządku. Następnie zsumowano liczbę z numerem pozycji, na której ta liczba stoi. Pokazać, że wśród tych sum znajdują się co najmniej dwie zakończone tą samą cyfrą (numery pozycji rozpoczynają się od 1).

Rozwiązanie

Przywołując po raz kolejny zasadę szufladkową Dirichleta, możemy „szufladki” ponumerować od 0 do 9 (tyle ile jest cyfr). Sum będzie znacznie więcej, bo od 2 do 20. Każdą z sum wrzucamy do takiej szufladki, jaką cyfrą suma się kończy. Znajdzie się zatem szufladka z przynajmniej dwiema sumami zakończonymi tą samą cyfrą.

Zadanie 58

Pokazać, że liczba postaci $1001 \cdot k + 3$ nie może być sześcianem liczby całkowitej dla żadnego k . (Np. liczba 3006)

Rozwiązanie

Gdyby liczba, o której mowa mogła być sześcianem mielibyśmy równanie:

$$1001 \cdot k + 3 = x^3 \Rightarrow \underbrace{7 \cdot 11 \cdot 13}_{1001} \cdot k = x^3 - 3 \quad (*)$$

Stąd wynika, że różnica po prawej stronie (*) byłaby podzielna przez 7. Zauważmy, że dowolną liczbę całkowitą x można przedstawić jako $x = 7 \cdot l + r$ gdzie $r \in \{0, 1, \dots, 6\}$. Podstawiając do prawej strony (*) otrzymamy:

$$(7 \cdot l + r)^3 - 3 = 7^3 \cdot l^3 + 3 \cdot 7^2 \cdot l^2 \cdot r + 3 \cdot 7 \cdot l \cdot r^2 + r^3 - 3 = 7(7^2 \cdot l^3 + 3 \cdot 7 \cdot l^2 \cdot r + 3 \cdot l \cdot r^2) + (r^3 - 3)$$

Podzielność tego wyrażenia przez 7 zależy od podzielności ostatniego składnika (w nawiasie) przez 7 a ten, jak łatwo sprawdzić, dla możliwych wartości r przez 7 się nie dzieli. Dlatego badana liczba nie może być sześcianem liczby całkowitej.

Zadanie 59

Liczby naturalne od 1 do 1967 wypisano jedna za drugą w dowolnym porządku. Pokazać, że tak powstała liczba nie może być kwadratem liczby naturalnej.

Rozwiązanie

Sprawdźmy sumę cyfr powstałej liczby. Bez względu na kolejność wypisywania suma będzie następująca:

$$1 + 2 + \dots + 1967 = \frac{1967 \cdot 1968}{2} = 1935528 \quad (*)$$

Jeżeli zsumujemy cyfry otrzymanego wyniku to otrzymamy 33. Wnioskujemy z tego, że suma (*) dzieli się przez 3 a nie dzieli się przez 9. To oznacza, że wypisana liczba nie może być kwadratem żadnej liczby (w kwadracie $x^2 = x \cdot x$ jeżeli jeden czynnik dzieli się przez 3 to i drugi się dzieli, czyli liczba musi się dzielić przez $3 \cdot 3 = 9$).

Zadanie 60

Na tablicy napisano 5 liczb całkowitych. Z tych liczb, biorąc po dwie utworzono następujące sumy: 12, 13, 14, 15, 16, 16, 17, 17, 19, 20. Czy jest to możliwe?

Rozwiązanie

Z 5 liczb można utworzyć 10 sum po 2 składniki. Wobec tego każdy składnik wystąpi w dwóch sumach. Jeżeli dodamy do siebie wszystkie sumy, to każda z 5 liczb wystąpi w tej sumie cztery razy. Wobec tego suma wyjściowych 5 liczb równa jest sumie 10 sum podzielonej przez 4. Policzmy zatem tą sumę:

$$12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 16 + 17 + 17 + 19 + 20 = 159$$

Ponieważ otrzymana suma nie dzieli się przez 4, wyjściowe liczby nie istnieją.

Zadanie 61

Pokazać, że w dowolnej liczbie sześciocyfrowej można tak przestawić cyfry, że różnica pomiędzy sumą trzech ostatnich a sumą trzech pierwszych cyfr nie przekroczy 9.

Rozwiązanie

Oznaczmy cyfry w liczbie sześciocyfrowej przez a_i w taki sposób, żeby uporządkować je od najmniejszej do największej. Otrzymamy rosnący ciąg $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$. Zbudujmy liczbę $a_1 a_3 a_5 a_2 a_4 a_6$. Pokażemy, że spełnia ona tezę zadania. Policzmy różnicę, o której mowa:

$$(a_2 + a_4 + a_6) - (a_1 + a_3 + a_5) = a_2 + a_4 + a_6 - a_1 - a_3 - a_5 = (a_2 - a_1) + (a_4 - a_3) + (a_6 - a_5) \quad (*)$$

Ponieważ cyfry są uporządkowane dodając do prawej strony (*) liczby nieujemne, co najwyżej zwiększymy tę sumę:

$$(a_2 + a_4 + a_6) - (a_1 + a_3 + a_5) \leq (a_2 - a_1) + (a_4 - a_3) + (a_6 - a_5) + (a_3 - a_2) + (a_5 - a_4)$$

Po otworzeniu nawiasów i redukcji otrzymamy:

$$(a_2 + a_4 + a_6) - (a_1 + a_3 + a_5) \leq -a_1 + a_6 = a_6 - a_1 \leq 9$$

Zadanie 62

Wszystkie liczby naturalne w dowolny sposób podzielono na dwie rozłączne grupy (np. parzyste, nieparzyste). Pokazać, że przynajmniej w jednej z grup znajdują się trzy liczby, z których jedna jest średnią arytmetyczną pozostałych.

Rozwiązanie

Sprawdźmy czy w jednej grupie nie ma liczb 5, 7, 9 jeżeli są dowiedliśmy tezy, jeżeli nie to przez A oznaczmy grupę, w której są dwie z tych liczb, przez B grupę z jedną z tych liczb. Te dwie liczby z grupy A oznaczmy przez a, b . Ze względu na wybór naszych liczb mamy $2a - b > 0$ i $2b - a > 0$. Jeżeli jedna z tych różnic będzie w grupie A to otrzymamy:

$$\frac{a + (2b - a)}{2} = b \quad \text{bądź} \quad \frac{b + (2a - b)}{2} = a$$

Teza zostanie udowodniona. Jeżeli obie różnice będą w grupie B , to ich średnia arytmetyczna:

$$\frac{2a - b + 2b - a}{2} = \frac{a + b}{2}$$

(jak widać jest to liczba naturalna) znajduje się w grupie A co kończy dowód (bo są tam a i b), lub w grupie B co również kończy dowód.

Zadanie 63

Czy dla dowolnego ciągu cyfr można znaleźć liczbę naturalną, która rozpoczyna się tym ciągiem i jest kwadratem innej liczby naturalnej.

Przykład. Dla 12 mamy na przykład $121 = 11^2$.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez A liczbę $\underbrace{a_1 a_2 \dots a_n}_n \underbrace{00 \dots 0}_{3n}$ złożoną z ciągu n cyfr, za którymi jest $3n$ zer.

Przez B oznaczmy liczbę $\underbrace{a_1 a_2 \dots a_n}_n \underbrace{99 \dots 9}_{3n}$ złożoną z ciągu n cyfr, za którymi jest $3n$ dziewiątek.

Niech k oznacza największą liczbę, której kwadrat nie przewyższa A . Wynika stąd, że $k < 10^{2n}$ (ponieważ A ma $4n$ cyfr). Dla liczby następnej $k+1$ mamy:

$$A < (k+1)^2 = k^2 + 2k + 1 < A + 2 \cdot 10^{2n} + 1 < A + 10^{3n} - 1 = B$$

(co widać po budowie liczby B). Z tego zespołu nierówności wynika, że liczba $(k+1)^2$ leży między liczbami $\underbrace{a_1 a_2 \dots a_n}_{n} \underbrace{00 \dots 0}_{3n}$ i $\underbrace{a_1 a_2 \dots a_n}_{n} \underbrace{99 \dots 9}_{3n}$. Oznacza to, że ma z tymi liczbami pierwszych n cyfr wspólnych oraz jest kwadratem liczby naturalnej.

Zadanie 64

Pokazać, że liczba $12^{42} + 9^{42}$ dzieli się przez 15.

Rozwiązanie

Należy pokazać, że liczba dzieli się 3 i przez 5 ($3 \cdot 5 = 15$). To, że dzieli się przez 3 widać natychmiast (potęgujemy 12 i 9). Aby pokazać podzielność przez 5, ustalmy ostatnią cyfrę badanej liczby:

$12^{42} = 12^{2 \cdot 21} = 144^{21}$ nieparzysta potęga liczby zakończonej na 4 kończy się na 4
 9^{42} parzysta potęga liczby zakończonej na 9 kończy się na 1

Stąd wyciągamy wniosek, że badana liczba zakończona jest cyfrą 5, więc dzieli się również przez 5.

Zadanie 65

Pewna liczba sześciocyfrowa zaczyna się cyfrą 2. Jeżeli zabierzemy cyfrę z miejsca pierwszego i przeniesiemy na ostatnie to wartość tak otrzymanej liczby zwiększy się trzykrotnie. Jaka to liczba?

Rozwiązanie

Jeżeli pięć ostatnich cyfr szukanej liczby oznaczmy przez x , to z warunków zadania można ułożyć następujące równanie:

$$\begin{aligned} 3(2 \cdot 10^5 + x) &= 10x + 2 \\ 600000 - 2 &= 7x \Rightarrow x = 85714 \end{aligned}$$

Szukana liczba to 285714.

Zadanie 66

Iloma zerami w zapisie kończy się Liczba 100! ?

Rozwiązanie

Należy ustalić przez jaką największą potęgę liczby 10 dzieli się $M = 100!$. Ponieważ $10 = 2 \cdot 5$, szukamy podzielników liczby M przez 2 i przez 5. Co piąty czynnik z iloczynu $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 100$ dzieli się przez 5. Wśród nich co piąty dzieli się przez 25. Razem więc mamy 24 czynniki dzielące się przez 5 ($100:5 + 20:5$). w takim razie liczba M dzieli się przez 5^{24} . Ponieważ w iloczynie $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 100$ co druga liczba jest parzysta, iloczyn dzieli się przez 2^{50} , tym bardziej dzieli się przez 2^{24} . Ustaliliśmy zatem podzielność liczby M przez $5^{24} \cdot 2^{24} = 10^{24}$. Wobec tego liczba kończy się 24 zerami.

Zadanie 67

Suma cyfr liczby trzycyfrowej wynosi 7. Pokazać, że ta liczba dzieli się przez 7 jeżeli cyfry dziesiątek i jedności są takie same.

Rozwiązanie

Oznaczmy cyfry przez abc . Z warunków zadania mamy $a+b+c=7$, oczywiście $a > 0$. Stąd $a = 7 - b - c$. Zatem liczbę można zapisać następująco:

$$l = 100a + 10b + c = 100(7 - b - c) + 10b + c = 700 - 90b - 99c = (700 - 91b - 98c) + (b - c)$$

Pierwszy składnik ostatniej sumy dzieli się przez 7. Pozostaje ustalić kiedy $b - c$ dzieli się przez 7, czyli przy jakich warunkach $b - c = 7k$? Ponieważ b i c są ze zbioru $\{0, \dots, 9\}$, k może być równe ± 1 lub 0. Dla $k = \pm 1$ dostajemy nieuporządkowane pary cyfr $\{9, 2\}$, $\{2, 9\}$, $\{8, 1\}$, $\{1, 8\}$, $\{7, 0\}$, $\{0, 7\}$, które należy odrzucić gdyż suma trzech cyfr ma się równać 7. Dla $k = 0$ dostajemy $b = c$.

Zadanie 68

Pokazać, że dla dowolnego n zachodzi $8 \mid (11^n - 3^n)$ (liczby postaci $11^n - 3^n$ są podzielne przez 8).

Rozwiązanie

Typowe zadanie na zastosowanie indukcji matematycznej. Wykonamy wszystkie kroki dowodu indukcyjnego.

(I) Sprawdzenie indukcyjne: Dla $n = 1$ mamy: $11^1 - 3^1 = 11 - 3 = 8$.

(II) Założenie indukcyjne: Zakładamy prawdziwość tezy czyli, że $8 \mid (11^n - 3^n)$

(III) Dowód indukcyjny

$$11^{n+1} - 3^{n+1} = 11 \cdot 11^n - 3 \cdot 3^n = (8 + 3) \cdot 11^n - 3 \cdot 3^n = 8 \cdot 11^n + 3 \cdot (11^n - 3^n)$$

Pierwszy składnik sumy po prawej stronie dzieli się przez 8 w sposób oczywisty, drugi składnik dzieli się przez 8 na podstawie założenia indukcyjnego. Na podstawie zasady indukcji matematycznej stwierdzamy prawdziwość tezy 3. Kolejne zadania pokażą, że rozumowanie indukcyjne może odbiegać od przyjętego schematu.

Zadanie 69

Pokazać, że jeżeli $x + \frac{1}{x}$ jest liczbą całkowitą, to całkowita jest również liczba:

$$x^n + \frac{1}{x^n}.$$

Rozwiązanie

Z treści zadania wynika, że sprawdzenie indukcyjne jest zbędne. Zakładamy prawdziwość tezy dla liczby n . Rozważmy iloczyn:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right) \cdot \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) = x^{n+1} + \frac{1}{x^{n-1}} + x^{n-1} + \frac{1}{x^{n+1}} = \left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right) + \left(x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}\right)$$

Po lewej stronie rozpatrywanej równości mamy iloczyn liczb całkowitych (na podstawie treści zadania i założenia indukcyjnego). Wobec tego suma po prawej stronie również musi być liczbą całkowitą. Pierwszy składnik sumy jest całkowity na podstawie założenia indukcyjnego (skoro założenie obowiązuje dla liczby n , tym bardziej obowiązuje dla liczby $n-1$). W takim razie drugi składnik sumy także musi być całkowity i tego należało dowieść.

Zadanie 70

Pokazać, że dla każdego naturalnego n zachodzi $6 \mid (n^3 + 5n)$.

Rozwiązanie

Dla $n=1$ otrzymamy $1+5 \cdot 1=6$. Zakładamy prawdziwość tezy dla n . Liczymy:

$$(n+1)^3 + 5(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 5n + 5 = (n^3 + 5n) + 3(n^2 + n + 2) = (n^3 + 5n) + 3 \cdot [n(n+1) + 2]$$

Pierwszy składnik sumy dzieli się przez 6 na podstawie założenia indukcyjnego, drugi dzieli się przez 3 i przez 2 (w nawiasie kwadratowym pierwszy składnik sumy jako iloczyn kolejnych liczb jest parzysty a drugim składnikiem jest 2).

Zadanie 71

Pokazać, że dla dowolnej liczby naturalnej $n > 1$ zachodzi $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$.

Rozwiązanie

Mamy tu przypadek gdzie pierwszą liczbą, która ma spełniać tezę nie jest 1. Zauważmy, że dla dowolnego $k=1, 2, \dots, n-1$ zachodzi nierówność $\frac{1}{n+k} > \frac{1}{2n}$ (mianownik po stronie lewej jest mniejszy od mianownika po stronie prawej). Stąd:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} > \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n}}_{n-1} + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

Zadanie 72

Na ile sposobów można przedstawić liczbę naturalną m w postaci sumy (bez składnika 0)? Przykład: $3=1+1+1$, $3=2+1$, $3=1+2$

Rozwiązanie

Weźmy m jedynek $\underbrace{111\dots 11}_m$ dowolne rozmieszczenie maksymalnie $m-1$ kresek między jedynekami, powoduje rozkład liczby m na składniki sumy. Np. dla $m=10$ jeden z rozkładów może wyglądać tak:

$$11|111|1|1111$$
$$m = 2 + 3 + 1 + 4$$

Każda z kresek może wystąpić lub nie, co daje 2^{m-1} możliwości, z których należy wykluczyć brak kresek. Stąd wynik $2^{m-1} - 1$.

Zadanie 73

Iloma sposobami można przedstawić liczbę naturalną $m \geq 3$ jako sumę trzech składników. Dwa sposoby różniące się kolejnością składników uważamy za różne.

Rozwiązanie

Liczba $m = \underbrace{1+1+1+\dots+1}_m$, w tej sumie jest $m-1$ znaków „+”. Jeżeli dwa znaki „+” zamienimy na kreski, otrzymamy przedstawienie m , o którym mowa w treści zadania. Np.: $6 = 1+1+1+1+1+1 = 1+1+1|1|1+1$ tu zamieniono trzeci i czwarty „+” i otrzymano rozkład $6 = 3+1+2$. Powstaje zatem pytanie, na ile sposobów można wybrać dwa znaki „+” z $m-1$. Jeżeli znamy kombinatorykę to liczymy natychmiast:

$$\binom{m-1}{2} = \frac{(m-1)!}{2!(m-3)!} = \frac{(m-2)(m-1)}{2}$$

Jeżeli nie znamy kombinatoryki rozumować można następująco. Pierwszy znak „+” wybieramy z $m-1$ elementów. Na każdy z tak wybranych znaków „+” przypada drugi wybrany już $m-2$ elementów. Dokonano zatem $(m-1)(m-2)$ wyborów, które liczone są podwójnie (np. skrajny lewy ze skrajnym prawym oraz skrajny prawy ze skrajnym lewym, które to wybory należy utożsamić). Stąd otrzymujemy:

$$\frac{(m-2)(m-1)}{2}$$

Zadanie 74

Pokazać, że dla dowolnych liczb naturalnych n, m jeden z pierwiastków $\sqrt[n]{n}, \sqrt[n]{m}$ jest nie większy od $\sqrt[3]{3}$.

Rozwiązanie

1. Jeżeli $n = m$ to mamy pokazać, że:

$$\sqrt[n]{n} < \sqrt[3]{3} \mid ()^{3n} \Rightarrow n^3 < 3^n$$

co jest prawdą dla każdego n , o czym przekonuje następujące rozumowanie indukcyjne:

$$3^{n+1} = 3 \cdot 3^n > 3 \cdot n^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + (n-3)n^2 + (n^2-3)n > n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (n+1)^3$$

czyli:

$$(n+1)^3 < 3^{n+1}$$

2. Jeżeli $n \neq m$ to przyjmijmy, że $m < n$ wtedy:

$$\sqrt[n]{m} < \sqrt[n]{n} < \sqrt[3]{3}$$

Zadanie 75

Znaleźć sumę: $1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3$

Rozwiązanie

Wykorzystamy wzór⁸: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$

Sumując do $2n$ otrzymamy:

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (2n-1)^3 + (2n)^3 &= \left[\frac{2n(2n+1)}{2} \right]^2 \\ \left[1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3 \right] + \left[2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + (2n)^3 \right] &= n^2(2n+1)^2 \\ 1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3 + 2^3(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) &= n^2(2n+1)^2 \\ 1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3 + 8 \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 &= n^2(2n+1)^2 \\ 1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3 &= n^2(2n+1)^2 - 2n^2(n+1)^2 \\ 1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3 &= n^2(4n^2 + 4n + 1 - 2n^2 - 4n - 2) \\ 1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3 &= n^2(2n^2 - 1) \end{aligned}$$

Zadanie 76

Znaleźć wszystkie liczby naturalne rozpoczynające się cyfrą 6, które zmniejszają się 25 razy jeżeli cyfrę 6 skreślimy.

Rozwiązanie

Szukane liczby mają budowę $6 \cdot 10^n + x$ gdzie x ma $n-1$ cyfr. Z warunków zadania mamy:

$$6 \cdot 10^n + x = 25x \Rightarrow x = \frac{6 \cdot 10^n}{24} = \frac{10^n}{4} = 25 \cdot 10^{n-2}, \text{ gdzie } n \geq 2$$

Szukane liczby to $625\underbrace{00\dots 0}_k, k \in \mathbb{N}$.

Zadanie 77

Pokazać, że nie istnieją liczby naturalne, które po wykreśleniu pierwszej cyfry zmniejszają się 35 razy.

Rozwiązanie

Zgodnie z warunkami zadania, gdyby takie liczby istniały spełniałyby równanie:

⁸ Patrz: Dodatek. Obliczanie sum.

$$a \cdot 10^n + x = 35x \Rightarrow x = \frac{a \cdot 10^n}{34} = \frac{5a \cdot 10^{n-1}}{17}$$

17 jest liczbą pierwszą, $a \in \{1, 2, \dots, 9\}$ zatem wartość x nigdy nie będzie naturalna.

Zadanie 78

Wykazać nierówność:

$$\sqrt{4 + \sqrt{4 + \sqrt{4 + \dots}}} < 3$$

Rozwiązanie

Policzmy wartość wyrażenia $\sqrt{4 + \sqrt{4 + \sqrt{4 + \dots}}} = x$ czyli:

$$\begin{aligned} \sqrt{4+x} = x &\Rightarrow 4+x = x^2 \Rightarrow x^2 - x - 4 = 0 \\ \Delta = 1+16 = 17, \quad x_1 = \frac{1-\sqrt{17}}{2} < 0, \quad x_2 = \frac{1+\sqrt{17}}{2} \in \left(\frac{5}{2}, 3\right) \end{aligned}$$

Zadanie 79

Pokazać, że dla każdego n liczba $3^{6n} - 2^{6n}$ dzieli się przez 35.

Rozwiązanie

Pokażemy że różnica parzystych jednakowych potęg jest podzielna przez sumę podstaw. Np. $8|5^2 - 3^2$, $5|3^4 - 2^4$.

Chcemy pokazać, że $(x+y)|(x^{2n} - y^{2n})$, wystarczy zauważyć, że wielomian $W(x) = x^{2n} - y^{2n}$ zeruje się na liczbie $-y$ zatem zgodnie z twierdzeniem Bezouta⁹ dzieli się przez dwumian $(x+y)$.

$$3^{6n} - 2^{6n} = (3^3)^{2n} - (2^3)^{2n} = 27^{2n} - 8^{2n} \Rightarrow (27+8)|27^{2n} - 8^{2n}$$

Podobnie zauważmy, że wielomian $G(x) = x^{2n-1} + y^{2n-1}$ zeruje się na liczbie $-y$, zatem dzieli przez dwumian $(x+y)$. Z czego wynika, że suma nieparzystych jednakowych potęg dzieli się również przez sumę podstaw. Prawdą więc jest, że: $12|7^3 + 5^3$, $13|9^5 + 4^5$.

Zadanie 80

Pokazać, że dla każdego całkowitego n zachodzi podzielność:

$$\text{a) } 3|n^3 - n \qquad \text{b) } 5|n^5 - n \qquad \text{c) } 7|n^7 - n$$

Rozwiązanie

W każdym przypadku możemy powołać się na małe twierdzenie Fermata, które rozstrzyga o podzielności. Można też dowodzić bezpośrednio:

⁹ Można nie powoływać się na tw. Bezouta a podzielić bezpośrednio np. metodą Hornera.

a) $n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n-1)n(n+1)$ iloczyn trzech kolejnych liczb całkowitych jest podzielny przez 3.

b) $n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1) = (n-1)n(n+1)(n^2 + 1)$ jeżeli liczba n kończy się jedną cyfrą ze zbioru $\{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$ to iloczyn $(n-1)n(n+1)$ kończy się cyfrą 0 lub 5. Jeżeli n kończy się cyfrą ze zbioru $\{2, 3, 7, 8\}$ to czynnik $(n^2 + 1)$ kończy się cyfrą 0 lub 5.

c) $n^7 - n = n(n^6 - 1) = n[(n^3)^2 - 1^2] = n(n^3 - 1)(n^3 + 1) = n(n-1)(n^2 + n + 1)(n+1)(n^2 - n + 1)$ jeżeli n nie dzieli się przez 7 to jest postaci $n = 7k + r$ gdzie $r \in \{1, 2, \dots, 6\}$. Dla $r \in \{1, 6\}$ czynniki $(n-1)(n+1)$ dają liczbę podzielną przez 7. Dla $r \in \{2, 3, 4, 5\}$ liczbę podzielną przez 7 dają czynniki $(n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1)$.

Zadanie 81

Pokazać, że $121 \nmid n^2 + 3n + 5$.

Rozwiązanie

Łatwo sprawdzić, że $n^2 + 3n + 5 = (n-4)(n+7) + 33$, to wyrażenie dzieli się przez 11 jeżeli iloczyn $(n-4)(n+7)$ dzieli się przez 11. Ponieważ różnica $(n+7) - (n-4)$ dzieli się przez 11 to każda z liczb $(n+7)$, $(n-4)$ dzieli się przez 11 lub nie dzieli równocześnie. Oznacza to, że iloczyn $(n-4)(n+7)$ dzieli się przez $11^2 = 121$ ale przez 121 nie dzieli się 33 zatem nie dzieli się też suma $(n-4)(n+7) + 33$.

Zadanie 82

Pokazać, że liczba $123456789ABCDE_{(15)}$ dzieli się przez 7.

Rozwiązanie

Podstawą systemu, w którym zapisano liczbę jest 15. Jej wartość w systemie dziesiętnym to:

$$L = 1 \cdot 15^{13} + 2 \cdot 15^{12} + 3 \cdot 15^{11} + \dots + 9 \cdot 15^5 + 10 \cdot 15^4 + \dots + 13 \cdot 15 + 14$$

Weźmy liczbę $1 + 2 + 3 + \dots + 12 + 13 + 14 = 105$ i odejmijmy od L :

$$\begin{aligned} L - 105 &= 1 \cdot 15^{13} + 2 \cdot 15^{12} + 3 \cdot 15^{11} + \dots + 13 \cdot 15 + 14 - 1 - 2 - 3 - \dots - 13 - 14 = \\ &= 1 \cdot (15^{13} - 1) + 2 \cdot (15^{12} - 1) + 3 \cdot (15^{11} - 1) + \dots + 13 \cdot (15 - 1) \quad (*) \end{aligned}$$

Zauważmy, że $15 = 2 \cdot 7 + 1 \Rightarrow 15^2 = (2 \cdot 7 + 1)^2 = n_1 \cdot 7 + 1 \Rightarrow 15^n = (2 \cdot 7 + 1)^n = n_n \cdot 7 + 1$ czyli dowolna potęga liczby 15 daje przy podzieleniu przez 7 reszty 1. Wynika stąd, że każdy nawias w wyrażeniu (*) jest podzielny przez 7, a ponieważ $105 = 15 \cdot 7$ to liczba L dzieli się przez 7.

Zadanie 83

Pokazać, że $100 \mid 11^{10} - 1$.

Rozwiązanie

Skorzystamy ze wzoru¹⁰ $x^{2n} - y^{2n} = (x - y)(x^{2n-1} + x^{2n-2}y + x^{2n-3}y^2 + \dots + xy^{2n-2} + y^{2n-1})$, otrzymamy:

$$11^{10} - 1^{10} = (11 - 1)(11^9 + 11^8 + 11^7 + \dots + 11 + 1)$$

W pierwszym nawiasie po prawej stronie mamy 10 w drugim nawiasie sumę dziesięciu liczb zakończonych cyfrą 1, zatem liczbę zakończoną zerem czyli podzielną przez 10. Iloczyn liczb podzielnych przez 10 dzieli się przez 100.

Zadanie 84

Jakie są dwie ostatnie cyfry liczby 3^{999} ?

Rozwiązanie

Należy policzyć resztę z dzielenia liczby 3^{999} przez 100. Policzymy, co jest łatwiejsze dwie ostatnie cyfry liczby¹¹ $3^{1000} = (3^5)^{200} \equiv_{100} 43^{200} = (43^2)^{100} \equiv_{100} 49^{100} = (49^2)^{50} \equiv_{100} 1^{50} = 1$ zatem dwie ostatnie cyfry to 01. Zauważmy teraz, że $3^{1000} = 3 \cdot 3^{999}$ jeżeli więc $3^{999} = x...yz$ to $yz \cdot 3 = ...01 \Rightarrow z = 7, y = 6$ ostatnie cyfry liczby 3^{999} to 67.

¹⁰ Wzór można sprawdzić bezpośrednio lub podzielić wielomian $W(x) = x^{2n} - y^{2n}$ przez dwumian $x - y$.

¹¹ symbol $\equiv_{100}$ oznacza równość modulo 100 czyli resztę z dzielenia przez 100. Patrz dodatek.

3. Równania i układy równań.

Zadanie 85

Po obu końcach placu o szerokości 10 m. umieszczono głośniki tej samej mocy. Z jednej strony 2 z drugiej 3 głośniki. Gdzie należy stanąć, aby słyszeć dźwięki z jednakową siłą¹²?

Rozwiązanie

Oznaczmy przez x odległość od grupy 2 głośników, $10-x$ będzie odległością od 3 głośników (znajdujemy się między grupami). Z praw akustyki otrzymamy równanie:

$$\frac{2}{3} = \frac{x^2}{(10-x)^2}$$
$$2(100 - 20x + x^2) = 3x^2$$

$$x^2 + 40x - 200 = 0$$
$$(x+20)^2 - 400 - 200 = (x+20)^2 - (10\sqrt{6})^2 = 0$$
$$(x+20-10\sqrt{6})(x+20+10\sqrt{6}) = 0$$
$$x_1 = -20+10\sqrt{6} \quad \text{lub} \quad x_2 = -20-10\sqrt{6}$$

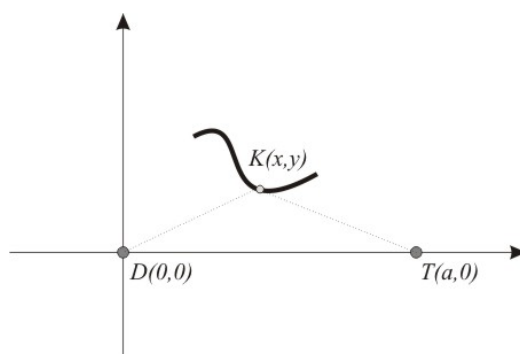
Przy rozwiązaniu najpierw wykorzystaliśmy wzór na kwadrat sumy a następnie na różnicę kwadratów. Aby jednakowo słyszeć głośniki należy stanąć w odległości $x_1 = -20+10\sqrt{6}$ od dwóch głośników. Zauważmy, że chociaż $x_2 = -20-10\sqrt{6}$ jest liczbą ujemną nie znaczy to wcale, że rozwiązanie trzeba odrzucić. Jest to jak najbardziej poprawne rozwiązanie tyle, że należy je właściwie zinterpretować. Ujemna liczba oznacza, że należy stanąć po przeciwnej stronie dwóch głośników niż punkt x_1 (który jest między głośnikami) w odległości od głośników równej $20+10\sqrt{6}$.

W akustyce dowodzi się, że miejscem geometrycznym punktów, z których jednakowo słyszeć grupę dwóch i trzech głośników jest okrąg. Wewnątrz okręgu lepiej słyszeć grupę dwóch głośników. Na zewnątrz grupę trzech. Na okręgu słyszalność jest taka sama. Uczynimy ten dowód treścią następnego zadania.

Zadanie 86

Pokazać, że miejscem geometrycznym punktów, z których jednakowo głośno słyszeć dwie grupy dwóch i trzech głośników, oddalonych o a jest okrąg.

¹² Przypomnijmy, że siła dźwięku słabnie proporcjonalnie do kwadratu odległości.



Rozwiązanie

Wprowadźmy układ współrzędnych w taki sposób, że jego środkiem będzie punkt z dwoma głośnikami $D(0,0)$ a oś odciętych będzie prostą przechodzącą przez punkty umiejscowienia głośników D i $T(a,0)$. Punkt $K(x,y)$ leży na szukanej krzywej. Z warunków zadania mamy:

$$\frac{2}{3} = \frac{DK^2}{TK^2} = \frac{(\sqrt{x^2 + y^2})^2}{(\sqrt{(x-a)^2 + y^2})^2} = \frac{x^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2}$$

Przekształcając otrzymamy:

$$\begin{aligned} 3x^2 + 3y^2 &= 2(x^2 - 2ax + a^2) + 2y^2 \\ 3x^2 + 3y^2 - 2x^2 + 4ax - 2a^2 - 2y^2 &= 0 \\ x^2 + 4ax - 2a^2 + y^2 &= 0 \\ (x+2a)^2 + y^2 &= (a\sqrt{6})^2 \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy zatem równanie okręgu o środku $S(-2a,0)$ i promieniu $r = a\sqrt{6}$, co kończy dowód. Zauważmy, że okrąg ten przecina oś odciętych w dwóch punktach o współrzędnych $-2a - a\sqrt{6}$ oraz $-2a + a\sqrt{6}$, co zgadza się z wynikiem z poprzedniego zadania.

Zadanie 87

W południe wskazówki godzinna i minutowa pokrywają się. O której godzinie wskazówki ponownie się pokryją?

Rozwiązanie

Jeżeli wskazówki ponownie pokryją się po czasie t , to wskazówka godzinna pokona drogę x . Wskazówka minutowa drogę $x+60$. Wskazówka godzinna porusza się z prędkością v wskazówka minutowa z prędkością $12v$ (ponieważ przesunięcie wskazówki godzinnej o $1/12$ obwodu tarczy następuje w tym samym czasie co przesunięcie wskazówki minutowej o cały obwód tarczy). Stąd otrzymamy równanie:

$$t = \frac{x}{v} = \frac{x+60}{12v}$$

z którego wyliczamy x :

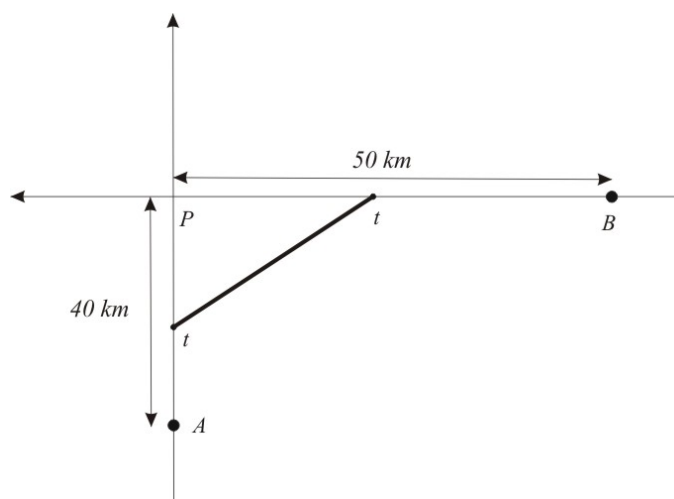
$$12x = x + 60 \Rightarrow x = \frac{60}{11} = 5\frac{5}{11}$$

Ponieważ 1 minuta to jednostka drogi na tarczy, stąd wynika, że wskazówki ponownie spotkają się o godz. $13.05\frac{5}{11}$.

Zadanie 88

Dwie linie kolejowe leżą prostopadłe do siebie i przecinają się w punkcie P . Pierwsza linia prowadzi od stacji A oddalonej od punktu P o 40 km. Druga linia prowadzi od stacji B oddalonej od punktu P o 50 km. W tym samym czasie wyjeżdżają z obu stacji dwa pociągi. Oba podążają w kierunku punktu P . Pociąg, który wyjechał ze stacji A jedzie z prędkością 48 km/h. Pociąg, który wyjechał ze stacji B jedzie z prędkością 36 km/h. Należy ustalić:

- Jaka będzie minimalna odległość między pociągami?
- W której minucie jazdy zostanie osiągnięta?
- Jaka w tym czasie będzie odległość pociągów od punktu P ?



Rozwiązanie

Założmy, że najmniejszą odległość pociągi osiągną po czasie t minut od wyjazdu ze stacji. Pociąg z A , który porusza się z prędkością 48 km/h to znaczy 800 m/min. przejedzie w tym czasie odległość $800t$ metrów. Pociąg z B , który porusza się 36 km/h, to znaczy 600 m/min. przejedzie $600t$ metrów. Po czasie t odległość pociągów od punktu P wyniesie odpowiednio:

$$40000 - 800t \text{ oraz } 50000 - 600t$$

Wtedy odległość między pociągami (*która na rysunku jest przeciwprostokątną*) będzie równa:

$$m = \sqrt{(40000 - 800t)^2 + (50000 - 600t)^2} = 100\sqrt{(400 - 8t)^2 + (500 - 6t)^2} \quad (*)$$

Odległość m będzie najmniejsza jeżeli wartość pierwiastka będzie najmniejsza a ta z kolei zależy od wyrażenia podpierwiastkowego. Przypatrzmy się funkcji:

$$y = (400 - 8x)^2 + (500 - 6x)^2$$

Po oczywistych przekształceniach dostaniemy:

$$y = 100x^2 - 12400x + 41000$$

Zauważmy, że nie musimy rozwiązywać tu równania kwadratowego i wyliczać żmudnie pierwiastki, chodzi nam o to aby ustalić dla jakiego x funkcja osiągnie najmniejszą wartość. Wykorzystamy w tym celu wzór na współrzędną wierzchołka:

$$x_w = \frac{-b}{2a} = \frac{12400}{200} = 62$$

Po 62 minutach pociągi będą najbliżej siebie. Wstawiając tę wielkość do równania (*) wyliczamy:

$$m = 100\sqrt{(400 - 496)^2 + (500 - 372)^2} = 100\sqrt{96^2 + 128^2} = 100\sqrt{25600} = 16000$$

Pozostało policzyć odległość pociągów od punktu P . Mamy dla pociągu jadącego ze stacji A oraz jadącego ze stacji B odpowiednio odległości:

$$40000 - 800 \cdot 62 = -9600 \quad \text{oraz} \quad 50000 - 600 \cdot 62 = 12800$$

Należy zinterpretować ujemny wynik dla pociągu ze stacji A , ten pociąg znajdzie się po przeciwnej stronie punktu P niż to zaznaczono na rysunku w odległości 9,6 km od punktu P . Zadanie zostało w pełni rozwiązane, najmniejszą odległość 16 km pociągi osiągną w 62 minucie jazdy, przy czym w tym czasie pociąg jadący ze stacji A będzie oddalony od P o 9,6 km; pociąg jadący ze stacji B będzie oddalony od punktu P o 12,8 km.

Zadanie 89

Dwa samoloty w tym samym czasie wyleciały na przeciw siebie z punktów A i B . Spotkały się 100 km od środka drogi. Jeżeli pierwszy samolot wyleciałby 20 min. później to spotkałby drugi samolot w $1/4$ drogi. Jeżeli drugi samolot wyleciałby o 20 min. później samoloty spotkałyby się w połowie drogi. Jaka była prędkość samolotów?

Rozwiązanie

Oznaczmy przez x , y szukane prędkości odpowiednio pierwszego i drugiego samolotu, a przez s odległość między punktami A i B .

Jeżeli pierwszy samolot wyleci 20 min. później i będzie leciał przez czas t , to przeleci drogę $\frac{1}{4}s$, drugi natomiast przeleci drogę $\frac{3}{4}s$. Różnica czasu lotu do spotkania wyniesie $\frac{1}{3}$ godziny. Stąd równanie:

$$\frac{3s}{4y} - \frac{s}{4x} = \frac{1}{3}$$

Podobnie jeżeli drugi samolot wyleci 20 min. później niż pierwszy, otrzymamy równanie:

$$\frac{s}{2x} - \frac{s}{2y} = \frac{1}{3}$$

Jeżeli samoloty leciały taki sam czas, otrzymamy równanie trzecie:

$$\frac{\frac{s}{2} + 100}{y} = \frac{\frac{s}{2} - 100}{x}$$

Przekształćmy układ:

$$\begin{cases} \frac{3s}{y} - \frac{s}{x} = \frac{4}{3} \\ \frac{s}{x} - \frac{s}{y} = \frac{2}{3} \\ \frac{s}{x} - \frac{s}{y} = 200 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \end{cases}$$

Układ ten najprościej rozwiązać metodą przeciwnych współczynników.

$$\begin{cases} \frac{2s}{y} = \frac{6}{3} \Rightarrow \frac{s}{y} = 1 \\ \frac{2s}{x} = \frac{10}{3} \Rightarrow \frac{s}{x} = \frac{5}{3} \\ \frac{s}{x} - \frac{s}{y} = 200 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{300} \end{cases}$$

Wyznaczamy odwrotności x, y i podstawiamy do ostatniego równania.

$$\frac{5}{3s} + \frac{3}{3s} = \frac{1}{300} \Rightarrow \frac{8}{3s} = \frac{1}{300} \Rightarrow s = 800$$

Stąd $x = 480 \text{ km/h}$, $y = 800 \text{ km/h}$

Zadanie 90

Turysta przechodzi na drugą stronę góry zaczynając marsz od podstawy A . Wspina się na szczyt C i schodzi po przeciwnej stronie góry B w takim samym czasie. W drodze powrotnej turysta wspina się 2 razy dłużej niż schodzi. Obliczyć stosunek prędkości schodzenia i wspinaczki, jeżeli założymy, że są stałe dla obu kierunków ruchu.

Rozwiązanie

Oznaczmy prędkości przez V_w, V_s , odpowiednio wspinaczki i schodzenia. Ponieważ drogi na szczyt i ze szczytu zajęły tyle samo czasu mamy pierwsze równanie, w drodze powrotnej turysta 2 razy dłużej się wspinał niż schodził, mamy układ:

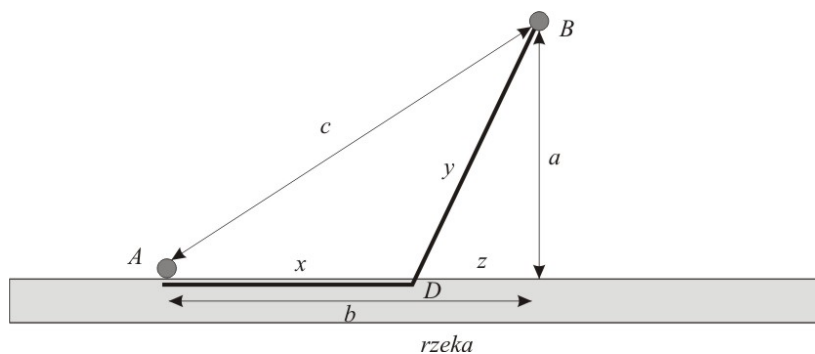
$$\begin{cases} \frac{AC}{V_w} = \frac{CB}{V_s} \\ \frac{CB}{V_w} = 2 \cdot \frac{AC}{V_s} \end{cases}$$

Po przekształceniu równań otrzymamy:

$$\begin{cases} \frac{AC}{CB} = \frac{V_w}{V_s} \\ \frac{AC}{CB} = \frac{1}{2} \frac{V_s}{V_w} \end{cases} \Rightarrow \frac{V_w}{V_s} = \frac{1}{2} \frac{V_s}{V_w} \Rightarrow 2 \cdot V_w^2 = V_s^2 \Rightarrow \frac{V_s}{V_w} = \sqrt{2}$$

Zadanie 91

Mamy dwie kooperujące fabryki A i B . Jedna znajduje się nad brzegiem rzeki, druga po tej samej stronie ale oddalona od rzeki o a . Odległość między fabrykami wynosi c . W jaki sposób zaplanować transport produktów między fabrykami jeżeli wiadomo, że transport rzeczny jest dwukrotnie tańszy od lądowego.



Rozwiązanie

I. Zauważmy, że najkrótsze drogi nie muszą oznaczać „najtańszych” dróg. Oznaczmy przez x długość ewentualnego transportu rzeczny. Przez y oznaczmy długość pozostałego transportu lądem. Ponieważ transport lądem jest dwukrotnie droższy otrzymamy, że koszt transportu będzie proporcjonalny do wyrażenia $k = x + 2y$. Podstawiając za x i y odpowiednie wartości otrzymamy:

$$k = b - \sqrt{y^2 - a^2} + 2y$$

Przekształćmy wyrażenie aby pozbyć się pierwiastka:

$$\begin{aligned} \sqrt{y^2 - a^2} &= (b - k) + 2y \\ y^2 - a^2 &= (b - k)^2 + 4y(b - k) + 4y^2 \\ 3y^2 + 4(b - k)y + (b - k)^2 + a^2 &= 0 \end{aligned}$$

Rozwiązujemy równanie kwadratowe ze względu na y :

$$\Delta = 16(b-k)^2 - 12(b-k)^2 - 12a^2 = 4[(b-k)^2 - 3a^2]$$
$$y_{1,2} = \frac{-4(b-k) \pm 2\sqrt{(b-k)^2 - 3a^2}}{6} = \frac{2(k-b) \pm \sqrt{(k-b)^2 - 3a^2}}{3}$$

Żeby rozwiązanie miało sens, pierwiastek w liczniku powinien istnieć a co za tym idzie musi być spełniona nierówność $(k-b)^2 \geq 3a^2$. Spójrzmy na wyrażenie $(k-b)^2$ najmniejsza jego wartość oznacza najmniejszy koszt (ponieważ b jest stałe i dodatnie, k dodatnie). Najmniejszą możliwą wartością wyrażenia jest $3a^2$. Mamy więc $k-b = a\sqrt{3}$ a stąd:

$$y = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

Policzmy stosunek:

$$\frac{a}{y} = \frac{a}{1} \cdot \frac{3}{2a\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Jest to sinus kąta przy punkcie D . Stąd wynika, że kąt przy punkcie D równy jest 60° . Ponieważ kąt jest stały, nie zależy od odległości między fabrykami. Aby transport był najtańszy należy zawsze budować drogę pod kątem 60° do rzeki. Policzmy długość drogi wodnej dla najtańszego transportu:

$$x = b - y \cos D = b - \frac{2a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2} = b - \frac{a\sqrt{3}}{3}$$
$$k = x + 2y = b - \frac{a\sqrt{3}}{3} + \frac{4a\sqrt{3}}{3} = b + \frac{3a\sqrt{3}}{3} = b + a\sqrt{3}$$

II. Można rozwiązywać zadanie korzystając z metod ustalania ekstremum funkcji. Wtedy jednak w sposób jawny nie widać wartości kąta, pod którym należy budować drogę lądową. Pokażmy również to rozwiązanie.

Niech z oznacza odcinek od końca drogi wodnej do odległości fabryki B od rzeki (*patrz rysunek*). Przy takich oznaczeniach funkcję kosztu transportu można uzależnić od zmieniającego się z :

$$f(z) = (b-z) + 2\sqrt{a^2 + z^2}$$

Zwróćmy uwagę, że w istocie jest to bardzo podobna funkcja do k z rozwiązania **I**. Zmienna $z \in (-\infty, b)$. Policzymy pochodną funkcji $f(z)$ pamiętając, że jest to funkcja złożona (zmienna pod pierwiastkiem).

$$f'(z) = -1 + \frac{2}{2\sqrt{a^2 + z^2}} \cdot 2z = \frac{2z}{\sqrt{a^2 + z^2}} - 1$$

Sprawdzamy kiedy pochodna się zeruje.

$$f'(z) = 0$$

$$\begin{aligned}\frac{2z}{\sqrt{a^2+z^2}} &= 1 \\ 2z &= \sqrt{a^2+z^2} \\ 4z^2 &= a^2+z^2 \\ z &= \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

Należy sprawdzić jakiego rodzaju ekstremum osiąga funkcja w znalezionym punkcie. W tym celu zauważmy, że:

$$\frac{a\sqrt{2}}{3} < \frac{a\sqrt{3}}{3} < \frac{a\sqrt{4}}{3} = \frac{2a}{3}$$

Policzmy wartość pochodnej z lewej i prawej strony punktu zerowania:

$$\begin{aligned}f'\left(\frac{a\sqrt{2}}{3}\right) &= \frac{\frac{2\sqrt{2}a}{3}}{\sqrt{\frac{11a^2}{9}}} - 1 = \frac{2\sqrt{2}a}{3} \cdot \frac{3}{a\sqrt{11}} - 1 = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{11}} - 1 = \frac{2\sqrt{22}}{11} - 1 < 0 \\ f'\left(\frac{2a}{3}\right) &= \frac{\frac{4a}{3}}{\sqrt{\frac{13a^2}{9}}} - 1 = \frac{4a}{3} \cdot \frac{3}{a\sqrt{13}} - 1 = \frac{4}{\sqrt{13}} - 1 = \frac{4\sqrt{13}}{13} - 1 > 0\end{aligned}$$

Z powyższego wynika, że funkcja w znalezionym punkcie osiąga minimum, którego wartość wynosi:

$$f\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right) = b - \frac{a\sqrt{3}}{3} + 2\sqrt{a^2 + \frac{3a^2}{9}} = b - \frac{a\sqrt{3}}{3} + \frac{a\sqrt{12}}{3} = b + \frac{2a\sqrt{3}}{3} - \frac{a\sqrt{3}}{3} = b + \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Długość drogi rzecznej będzie więc równa:

$$x = b - z = b - \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Długość drogi lądowej:

$$\begin{aligned}y &= \sqrt{a^2 + z^2} = \sqrt{a^2 + \frac{3a^2}{9}} = \frac{2a\sqrt{3}}{3} \\ \sin D &= \frac{a}{y} = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

Wyniki w obu sposobach rozwiązana są oczywiście zgodne, natomiast każdy ze sposobów unaocznia pewną informację dodatkową.

Zadanie 92

Trzy małżeństwa wybrały się wspólnie na zakupy. Panowie mieli na imię Jan, Marek i Adam. Panie Anna, Ewa i Dorota. Który pan był mężem, której pani nie wiemy. Wiemy natomiast, że każda z osób zapłaciła za każdą zakupioną rzecz tyle złotych ile rzeczy kupiła. Wiadomo ponadto, że każdy z mężów zapłacił o 63 zł więcej od swojej żony. Jan zapłacił o 23 zł więcej od Anny, a Marek o 11 zł więcej od Ewy. Proszę ustalić kto z kim jest małżeństwem i ile towarów zakupili.

Rozwiązanie

Jeżeli mąż kupił x przedmiotów, to zapłacił za nie x^2 złotych (za każdy przedmiot po x złotych). Podobnie jeżeli jego żona kupiła y przedmiotów, to zapłaciła za nie y^2 złotych. Ponadto z warunków zadania wynika, że $x^2 - y^2 = 63$. Przekształcimy ostatnią równość:

$$(x - y) \cdot (x + y) = 63 \quad (*)$$

Po rozłożeniu 63 na czynniki dostajemy $63 = 3 \cdot 3 \cdot 7$, w takim razie równanie (*) może mieć następujące kombinacje rozwiązań:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 63 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = 21 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 7 \\ x + y = 9 \end{cases}$$

Zauważmy, że różnica jest dodatni wobec tego jest mniejsza od sumy, dlatego powyższe układy wyczerpują wszystkie możliwości. Rozwiązaniami powyższych układów są liczby (najprościej wydaje się skorzystać z metody przeciwnych współczynników, wystarczy dodać stronami równania):

$$\begin{cases} x = 32 \\ y = 31 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 12 \\ y = 9 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 8 \\ y = 1 \end{cases}$$

Przystąpimy teraz do analizy logicznej wyniku. Skoro Jan zapłacił o 23 zł więcej od Anny, to Jan jest w pierwszej parze, Anna w drugiej ($32 = 23 + 9$). Skoro Marek zapłacił o 11 zł więcej od Ewy, to Marek jest w drugiej parze, Ewa w trzeciej ($12 = 11 + 1$). Mamy zatem:

$$\begin{cases} Jan \rightarrow 32 \\ Dorota \rightarrow 31 \end{cases} \quad \begin{cases} Marek \rightarrow 12 \\ Anna \rightarrow 9 \end{cases} \quad \begin{cases} Adam \rightarrow 8 \\ Ewa \rightarrow 1 \end{cases}$$

Zadanie 93

Motocyklista, rowerzysta i pieszy poruszają się po drodze w jednakową stronę ze stałymi prędkościami. O 12 godzinie motocyklista znajduje się przed rowerzystą w odległości trzy razy mniejszej, niż odległość rowerzysty od pieszego. O godzinie 12¹⁵ motocyklista dogania rowerzystę a o 12⁴⁰ dogania pieszego. O której godzinie rowerzysta dogoni pieszego?

Rozwiązanie

Oznaczmy położenie motocyklisty przez M , rowerzysty przez R , pieszego przez P . Jeżeli odległość między motocyklistą a rowerzystą o godzinie 12 oznaczmy przez S , to odległość między motocyklistą a pieszym wyniesie $S + 3S$. Prędkości poszczególnych uczestników ruchu oznaczmy odpowiednio przez V_M , V_R , V_P . Niech t oznacza czas, po którym rowerzysta dogoni pieszego.

W czasie 15 min. motocyklista pokonał S i jeszcze ten kawałek drogi, który przejechał przez 15 min. rowerzysta. Zatem o godzinie 12¹⁵ sytuację na drodze przedstawia równanie:

$$\frac{1}{4}V_M = S + \frac{1}{4}V_R$$

W czasie 40 min. od początku obserwacji motocyklista dogania pieszego a więc pokonuje drogę $4S$ i dodatkowo ten kawałek, który pieszy pokona przez 40 min. Stąd równanie:

$$\frac{2}{3}V_M = 4S + \frac{2}{3}V_P$$

Po czasie t rowerzysta dogania pieszego:

$$tV_R = 3S + tV_P$$

$$\begin{cases} \frac{1}{4}V_M = S + \frac{1}{4}V_R \\ \frac{2}{3}V_M = 4S + \frac{2}{3}V_P \\ tV_R = 3S + tV_P \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_M - V_R = 4S \\ V_M - V_P = 6S \\ t(V_R - V_P) = 3S \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_R - V_P = 2S \\ t(V_R - V_P) = 3S \end{cases} \Rightarrow 2tS = 3S \Rightarrow t = \frac{3}{2}$$

Rowerzysta dogoni pieszego po półtorej godziny, to znaczy o 13³⁰.

Zadanie 94

Nad rzeką znajdują się dwie przystanie. W górnym biegu przystań A i oddalona od niej o 400 km, w dolnym biegu przystań B . Motorówka płynąc od A do B i z powrotem, z cztero godzinnym postojem na przystani B , pokonuje tę drogę w ciągu doby. Podczas jednego z rejsów motorówka miała w drodze powrotnej awarię. Musiała zacamować na 2 godziny 100 km od przystani A . W rezultacie awarii prędkość podróży na końcowym odcinku zmniejszyła się dwukrotnie i wliczając postój, podróż na tym odcinku trwała tyle, co droga od A do B . Należy znaleźć prędkość motorówki w stojącej wodzie oraz prędkość nurtu rzeki.

Rozwiązanie

Oznaczmy prędkość nurtu przez V_R a prędkość motorówki w stojącej wodzie przez V_M . Przy typowym kursie (bez awarii) do czasu podróży od A do B dodajemy czas podróży od B do A i otrzymujemy 20 godzin. Należy pamiętać, że płynąc z nurtem

prędkość motorówki sumuje się z prędkością nurtu. Płynąc pod prąd prędkość motorówki zmniejsza się o prędkość nurtu. Ruch ten można opisać równaniem:

$$\frac{400}{V_M + V_R} + \frac{400}{V_M - V_R} = 20$$

Podczas kursu awaryjnego, zaszły dwie rzecz. Po pierwsze prędkość podróży (czyli prędkość motorówki pomniejszona o prędkość nurtu) od pewnego momentu zmniejszyła się dwukrotnie. Po drugie nastąpił dwu godzinny postój. Końcową drogę motorówka pokonała w takim czasie, z postojem, jak zwykle drogę od A do B . Mamy więc równania:

$$\frac{\frac{100}{V_M - V_R} + 2}{2} = \frac{400}{V_M + V_R}$$

Rozwiązujemy układ (najłatwiej metodą przeciwnych współczynników):

$$\begin{cases} \frac{400}{V_M + V_R} + \frac{400}{V_M - V_R} = 20 \\ \frac{\frac{100}{V_M - V_R} + 2}{2} = \frac{400}{V_M + V_R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{400}{V_M + V_R} + \frac{400}{V_M - V_R} = 20 \\ \frac{200}{V_M - V_R} - \frac{400}{V_M + V_R} = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{600}{V_M - V_R} = 18 \\ \frac{1200}{V_M + V_R} = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{100}{V_M - V_R} = 3 \\ \frac{50}{V_M + V_R} = 1 \end{cases}$$

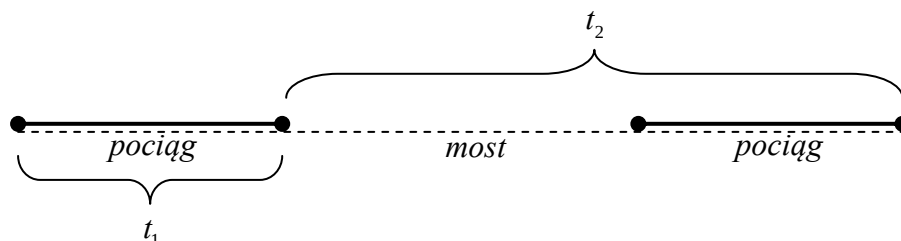
$$\begin{cases} 100 = 3V_M - 3V_R \\ 50 = V_M + V_R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_M = 41\frac{2}{3} \\ V_R = 8\frac{1}{3} \end{cases} \text{ km/h}$$

Zadanie 95

Pociąg przejeżdża koło obserwatora w czasie t_1 sekund, następnie wjeżdża na most długości a metrów i z tą samą prędkością przejeżdża przez most w czasie t_2 sekund. Znaleźć długość i prędkość pociągu.

Rozwiązanie

Zauważmy, że czas t_1 to jest czas, który mierzymy od minięcia obserwatora przez początek lokomotywy do minięcia obserwatora przez koniec ostatniego wagonu. Podobnie czas t_2 to jest czas, który mierzymy od wjechania początku lokomotywy na most aż do zjechania z mostu końca ostatniego wagonu. Widać to na rysunku poniżej:



Jeżeli długość pociągu oznaczmy przez x to z warunków zadania otrzymujemy następujące równanie:

$$v = \frac{x}{t_1} = \frac{a+x}{t_2} \Rightarrow t_2 x = t_1 a + t_1 x$$
$$(t_2 - t_1)x = t_1 a \Rightarrow x = \frac{t_1 a}{t_2 - t_1}, v = \frac{a}{t_2 - t_1}$$

Zadanie 96

Rozwiązać układ równań w liczbach naturalnych:

$$\begin{cases} a^3 - b^3 - c^3 = 3abc \\ a^2 = 2(b+c) \end{cases}$$

Rozwiązanie

Ponieważ rozwiązaniem ma być w liczbach naturalnych, więc $3abc > 0$. Stąd:

$$a^3 - b^3 - c^3 > 0 \Rightarrow a^3 > b^3 + c^3 \Rightarrow a^3 > b^3 \wedge a^3 > c^3 \Rightarrow a > b \wedge a > c \Rightarrow 2a > b + c$$
$$4a > 2(b+c) \Rightarrow 4a > a^2 \Rightarrow a < 4 \text{ i } a \text{ parzyste (bo } a^2 \text{ parzyste), zatem:}$$
$$a = 2 \Rightarrow b = 1, c = 1$$

Zadanie 97

Rozwiązać w liczbach całkowitych układ równań:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ xy - z^2 = 1 \end{cases}$$

Rozwiązanie

(I) $xy - z^2 = 1 \Rightarrow xy = 1 + z^2 \Rightarrow xy \geq 1$ z drugiej strony średnia geometryczna jest mniejsza bądź równa średniej arytmetycznej $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} = 1 \Rightarrow \sqrt{xy} \leq 1 \Rightarrow xy \leq 1$ biorąc pod uwagę dwie końcowe nierówności otrzymujemy $xy = 1 \Rightarrow x = 1, y = 1, z = 0$.

(II) $x + y = 2 \Rightarrow y = 2 - x \Rightarrow x(2 - x) - z^2 = 1 \Rightarrow z^2 = -x^2 + 2x - 1 \Rightarrow z^2 = -(x - 1)^2$ kwadrat nie może być ujemny, zatem $z^2 = 0 \Rightarrow z = 0, x = 1, y = 1$.

Zadanie 98

Rozwiązać w liczbach całkowitych układ równań:

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 26 \\ x^2 y - xy^2 = 6 \end{cases}$$

Rozwiązanie

$$\begin{cases} (x-y)(x^2 + xy + y^2) = 26 \\ xy(x-y) = 6 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2 + xy + y^2}{xy} = \frac{13}{3} \Rightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{10}{3}, \text{ podstawmy } t = \frac{x}{y}$$

$$t + \frac{1}{t} = \frac{10}{3} \Rightarrow 3t^2 - 10t + 3 = 0, \Delta = 64, t_1 = \frac{10-8}{6} = \frac{1}{3}, t_2 = \frac{10+8}{6} = 3$$

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3x = y \text{ po podstawieniu do układu równań mamy } \begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \end{cases}$$

$$\frac{x}{y} = 3 \Rightarrow x = 3y \text{ po podstawieniu do układu równań mamy } \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

Zadanie 99¹³

Łąkę na której pasą się byki podzielono na trzy części. Na części pierwszej o powierzchni 3,3 akra pasło się przez 4 tygodnie 12 byków. Na drugiej części o powierzchni 10 akrów pasło się przez 9 tygodni 21 byków. Byki miały jednakowy apetyt i zjadały trawę równomiernie zarówno tę, którą na łące zastały, jak i tę która odrasta. Trzecia część łąki ma powierzchnię 24 akrów. Ile byków należy na nią wpuścić aby mogły się paść przez 18 tygodni. Załóżmy, że trawa każdego dnia ma jednakowy przyrost, oraz jednakową wysokość początkową.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez y wysokość początkową trawy a przez x jej dzienny przyrost. W takim razie objętość trawy na poszczególnych częściach łąki będzie następująca:

$$\frac{10}{3}(y + 7 \cdot 4x) \qquad 10(y + 7 \cdot 9x) \qquad 24(y + 7 \cdot 18x)$$

Oznaczmy przez z liczbę byków, którą należy wpuścić na trzecią część łąki. Na poszczególnych częściach łąki każdy byk dziennie będzie zjadał następującą ilość trawy:

$$\frac{\frac{10}{3}(y + 7 \cdot 4x)}{12 \cdot 7 \cdot 4} \qquad \frac{10(y + 7 \cdot 9x)}{21 \cdot 7 \cdot 9} \qquad \frac{24(y + 7 \cdot 18x)}{z \cdot 7 \cdot 18}$$

Pamiętając, że byki mają jednakowy apetyt uzyskujemy układ równań:

$$\frac{5(y + 28x)}{6 \cdot 12 \cdot 7} = \frac{10(y + 63x)}{21 \cdot 7 \cdot 9} = \frac{4(y + 126x)}{z \cdot 7 \cdot 3}$$

Z pierwszej pary mamy:

$$\frac{5(y + 28x)}{6 \cdot 12 \cdot 7} = \frac{10(y + 63x)}{21 \cdot 7 \cdot 9} \Rightarrow \frac{5(y + 28x)}{8} = \frac{10(y + 63x)}{21} \Rightarrow 105y + 105 \cdot 28x = 80y + 80 \cdot 63x$$

$25y = 2100x \Rightarrow y = 84x$ Obliczoną wartość y podstawiamy do drugiej pary:

¹³ To zadanie zostało ułożone przez Isaca Newtona dla studentów, kiedy został profesorem matematyki w Trinity College (Cambridge).

$$\frac{10(y+63x)}{21 \cdot 7 \cdot 9} = \frac{4(y+126x)}{z \cdot 7 \cdot 3} \Rightarrow \frac{10(y+63x)}{21 \cdot 3} = \frac{4(y+126x)}{z} \Rightarrow 10z(84x+63x) = 252(84x+126x)$$

$$z = \frac{252 \cdot 210x}{10 \cdot 147x} = 36$$

Zadanie 100

Trzy beczki o jednakowej objętości zaczynamy w tym samym momencie napełniać wodą. Pierwsza beczka była pusta a w drugiej i trzeciej było już trochę wody. Pierwszą beczkę napełniamy z szybkością 10 litrów na minutę, drugą z szybkością 8 litrów na minutę a trzecią 6 litrów na minutę. Wiadomo, że beczki napełnią się w tym samym czasie. Ile razy więcej wody było na początku w beczce trzeciej w porównaniu z drugą?

Rozwiązanie

Oznaczmy przez v objętość każdej z beczek a przez t czas ich napełnienia. Przyjmijmy, że na początku w drugiej beczce było x a w trzeciej y wody. Chcemy obliczyć stosunek $y:x$. Z warunków zadania otrzymamy układ:

$$\begin{cases} v = 100t \\ v = x + 80t \\ v = y + 60t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 100t = x + 80t \\ 100t = y + 60t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 20t \\ y = 40t \end{cases} \Rightarrow y:x = 2$$

Zadanie 101

Mamy trzy rodzaje żetonów o nominałach a , b , c złotych. Żeton a , dwa żetony b oraz trzy żetony c dają razem 14 złotych, trzy żetony a , pięć żetonów b i jeden żeton c dają razem 31 zł. Jaką kwotę da razem dziewięć żetonów a , szesnaście żetonów b i jedenaście żetonów c ?

Rozwiązanie

Biorąc pod uwagę warunki zadania otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} a + 2b + 3c = 14 \\ 3a + 5b + c = 31 \end{cases} \quad (*)$$

Poszukujemy następującej wartości sumy: $9a + 16b + 11c$. Z układu równań (*) nie możemy wyliczyć niewiadomych a , b , c . Możemy natomiast wartość sumy przedstawić jako kombinację liniową lewych stron układu (*):

$$9a + 16b + 11c = \alpha(a + 2b + 3c) + \beta(3a + 5b + c) \quad (**)$$

Otwierając w równaniu (**) nawiasy, porządkując je i porównując strony otrzymamy:

$$9a + 16b + 11c = (\alpha + 3\beta)a + (2\alpha + 5\beta)b + (3\alpha + \beta)c$$

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta = 9 \\ 2\alpha + 5\beta = 16 \\ 3\alpha + \beta = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

Biorąc pod uwagę (**) szukana wartość sumy wynosi:

$$9a + 16b + 11c = 3(a + 2b + 3c) + 2 \cdot (3a + 5b + c) = 3 \cdot 14 + 2 \cdot 31 = 104$$

Zadanie 102

Łąkę podzielono na trzy części, przy czym trzecia część to $\frac{2}{5}$ całej łąki. W ciągu dnia wykoszono połowę części pierwszej, $\frac{3}{5}$ części drugiej i całą część trzecią, co łącznie stanowi powierzchnię trzykrotnie większą od części drugiej. Jaki procent całej łąki wykoszono w ciągu dnia?

Rozwiązanie

Oznaczmy powierzchnię łąki przez s , powierzchnię części pierwszej przez x , powierzchnię części drugiej przez y . Chcemy policzyć stosunek $3y:s$ wyrażony w procentach. Z warunków zadania mamy układ równań:

$$\begin{cases} x + y + \frac{2}{5}s = s \\ \frac{x}{2} + \frac{3}{5}y + \frac{2}{5}s = 3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 5y = 3s \\ 10x + 8s = 48y \end{cases} \Rightarrow 6s - 10y + 8s = 48y \Rightarrow 7s = 29y \Rightarrow \frac{3y}{s} = \frac{21}{29} \approx 72,4\%$$

Zadanie 103

Postawiono dwie puste beczki różnej pojemności obok siebie. Cztery krany o jednakowej wydajności napełniały pierwszą beczkę. Kiedy pierwsza beczka była napełniona w $\frac{1}{5}$ objętości przełączono jeden kran do beczki drugiej. Kiedy pierwsza beczka była napełniona w połowie, przełączono drugi kran do beczki drugiej. Obie beczki skończono napełniać w tym samym czasie. Jaki jest ich stosunek objętości?

Rozwiązanie

Oznaczmy objętość pierwszej z beczek przez x , objętość drugiej beczki przez y . Wydajność kranu oznaczmy przez z (ilość litrów wody wypływającej w jednostce czasu). Mamy policzyć $x:y$. W momencie drugiego przełączenia kranów obie beczki miały do napełnienia tę samą objętość (każdą napełniały dwa krany w tym samym czasie). Czas, który upłynął pomiędzy pierwszym a drugim przyłączeniem kranów wynosi:

$$\frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right)x}{3z}$$

Czas ten liczymy od objętości $\frac{1}{5}x$ do objętości $\frac{1}{2}x$ napełnianej 3 kranami. W tym czasie do drugiej beczki wlewo wody (jednym kranem):

$$\frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right)x}{3z} \cdot z = \frac{1}{10}x$$

W momencie przełączenia drugiego kranu pierwsza beczka była nienapełniona w połowie, druga w $y - \frac{1}{10}x$ objętości. Wielkości te są równe, mamy zatem:

$$\frac{1}{2}x = y - \frac{1}{10}x \Rightarrow 6x = 10y \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

Zadanie 104

Z punktu A do punktu C oddalonego o 30 km wyjechał motocyklista. Równocześnie z punktu B leżącego pomiędzy A i C, 20 km od A w kierunku C, wyszedł piechur, natomiast z C w kierunku A wyjechał rowerzysta. Po jakim czasie motocyklista dogoni piechura jeżeli wiadomo, że nastąpi to pół godziny po spotkaniu motocyklisty z rowerzystą i czas, który upłynął do spotkania motocyklisty z rowerzystą jest dwa razy dłuższy od czasu, który upłynął do spotkania piechura z rowerzystą?

Rozwiązanie

Oznaczmy prędkość motocyklisty, piechura i rowerzysty odpowiednio v_m , v_p , v_r km/h. Czas, który upłynął do spotkania motocyklisty i rowerzysty oznaczmy przez t . Na podstawie treści zadania otrzymujemy układ trzech równań:

$$\begin{cases} (v_m + v_r)t = 30 \\ (v_p + v_r)\frac{t}{2} = 10 \\ v_m\left(t + \frac{1}{2}\right) = 20 + v_p\left(t + \frac{1}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_m + v_r = \frac{30}{t} \\ v_p + v_r = \frac{20}{t} \\ v_m - v_p = \frac{20}{t + \frac{1}{2}} \end{cases}$$

Komentarza wymaga trzecie równanie. Po czasie $t + \frac{1}{2}$ motocyklista dogania piechura to znaczy przebywa drogę 15 km (taki dystans ich dzielił na początku) plus drogę, którą w tym czasie przeszedł piechur. Po odjęciu równań stronami mamy:

$$\begin{cases} v_m - v_p = \frac{10}{t} \\ v_m - v_p = \frac{20}{t + \frac{1}{2}} \end{cases} \Rightarrow \frac{10}{t} = \frac{20}{t + \frac{1}{2}} \Rightarrow 2t = t + \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{1}{2}$$

Motocyklista dogoni piechura po godzinie.

Zadanie 105

Z punktu A do punktu B wyruszył piechur. W tym samym czasie z punktu B do A wyruszył samochód. Po spotkaniu piechura, samochód nawrócił i podwiózł go do B, następnie ponownie nawrócił i pojechał do A. W rezultacie tych manewrów kierowca dotarł do punktu A w czasie dwa i pół raza dłuższym niż gdyby jechał bezpośrednio. Ile razy szybciej piechur dotarł do punktu B, korzystając z podwózki?

Rozwiązanie

Oznaczmy prędkość piechura i samochodu odpowiednio przez v_p , v_s km/h. Odległość między punktami A i B oznaczmy przez s_0 a drogę, którą przebył samochód do czasu spotkania pieszego s_1 . Z warunków zadania otrzymamy równanie:

$$\frac{s_0}{v_s} \cdot \frac{5}{2} = \frac{s_0 + 2s_1}{v_s} \Rightarrow 5s_0 = 2s_0 + 4s_1 \Rightarrow s_1 = \frac{3}{4}s_0$$

Piechur i samochód tyle samo czasu podróżowali do momentu spotkania zatem:

$$\frac{\frac{1}{4}s_0}{v_p} = \frac{\frac{3}{4}s_0}{v_s} \Rightarrow \frac{1}{v_p} = \frac{3}{v_s} \Rightarrow 3v_p = v_s$$

Czas podróży piechura gdyby nie był podwożony równy jest: $\frac{s_0}{v_p}$

W przypadku podwiezienia czas ten wynosi: $\frac{1}{4}\frac{s_0}{v_p} + \frac{3}{4}\frac{s_0}{3v_p} = \frac{3}{2}\frac{s_0}{3v_p} = \frac{s_0}{2v_p}$

Stosunek tych wielkości to: $\frac{s_0}{v_p} : \frac{s_0}{2v_p} = 2$

Piechur korzystając z podwózki dotarł do celu 2 razy szybciej.

Zadanie 106

Kupiono kilka czekolad i lizaków. Na czekolady uzyskano zniżkę 1,5 zł i zapłacono 10,5 zł, za lizaki zapłacono 0,5 zł. Czekolad jest o 6 sztuk więcej niż lizaków a cena jednej czekolady jest większa od ceny lizaka więcej niż o złotówkę. Ile czekolad i ile lizaków kupiono i po ile one kosztowały?

Rozwiązanie

Niech x oznacza ilość lizaków w cenie t zł za sztukę. Czekolada niech kosztuje k zł. Z treści zadania wynika układ:

$$\begin{cases} xt = 0,5 \\ (x+6)k = 10,5 \\ k - t > 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = \frac{10,5}{x+6} \\ t = \frac{0,5}{x} \end{cases} \Rightarrow \frac{10,5}{x+6} - \frac{0,5}{x} > 1 \Rightarrow 10,5x - 0,5(x+6) > (x+6)x$$

$$10x - 3 > x^2 + 6x \Rightarrow x^2 - 4x + 3 < 0, \Delta = 4, x_1 = 1, x_2 = 3, x \in (1, 3) \wedge x \in \mathbb{N} \Rightarrow x = 2$$

Kupiono 2 lizaki po 0,25 zł oraz 8 czekolad w cenie $(10,5 + 1,5) : 8 = 1,5$ zł za sztukę.

Zadanie 107

Basen jest napełniany przez n szlauchów. Gdyby pracowały pojedynczo, to pierwszy napełniłby basen w ciągu 2 godz., drugi w ciągu 4, trzeci 8 itd. Ile najmniej potrzeba szlauchów aby napełnić basen w ciągu 61 minut? Czy można napełnić basen w czasie krótszym od godziny?.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez v objętość basenu. Wydajność pierwszego szlauchu to $\frac{v}{2}$, drugiego

$\frac{v}{4}$, trzeciego $\frac{v}{8}$, ..., n -tego $\frac{v}{2^n}$. Jeżeli pracują razem to wydajność takiego zespołu

wynosi: $\frac{v}{2} + \frac{v}{4} + \frac{v}{8} + \dots + \frac{v}{2^n} = v \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} \right) = v \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = v \left(1 - \frac{1}{2^n} \right)$. Czas na-

pełniania objętości v przy takiej wydajności to: $\frac{v}{v \left(1 - \frac{1}{2^n} \right)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^n}}$. Pytamy dla jakiego

najmniejszego n czas ten nie przekroczy $1\frac{1}{60}$ (jednostką są godziny), czyli:

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{2^n}} \leq \frac{61}{60} \Rightarrow 60 \leq 61 - \frac{61}{2^n} \Rightarrow \frac{61}{2^n} \leq 1 \Rightarrow 61 \leq 2^n \Rightarrow n = 6$$

Gdyby było możliwe napełnienie basenu w ciągu godziny, poniższa nierówność miałaby rozwiązanie:

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{2^n}} \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 1 - \frac{1}{2^n} \Rightarrow \frac{1}{2^n} \leq 0$$

Do napełnienia basenu potrzeba 6 szlauchów, nie jest możliwe napełnienie basenu w czasie mniejszym lub równym godzinie.

Zadanie 108

Tokarz na nowej tokarce wytacza więcej niż 8 kompletnych elementów w ciągu godziny. Na starej tokarce takich samych elementów, w tym czasie, wytacza o 3 mniej. Dzienną normę na nowej tokarce tokarz wypracowuje w ciągu kilku pełnych godzin. Dwóch tokarzy na starych tokarkach taką samą normę wypracowują o godzinę wcześniej. Ile elementów należy wytoczyć aby wypracować dzienną normę?

Rozwiązanie

Oznaczmy przez x ilość detali, które tokarz wytacza na nowej tokarce w ciągu godziny, y niech oznacza dzienną normę. Mamy $x, y \in \mathbb{N}$. Ponadto $\frac{y}{x}$ ilość godzin potrzebna do wypracowania normy przez jednego tokarza na nowej tokarce, gdzie $\frac{y}{x} \in \mathbb{N}$. $\frac{y}{2(x-3)}$ ilość godzin potrzebna do wypracowania normy przez dwóch tokarzy na starej tokarce. Stąd równanie:

$$\frac{y}{2(x-3)} + 1 = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2(x-3)} \Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{2(x-3) - x}{2(x-3)x} \Rightarrow y = \frac{2x^2 - 6x}{x-6}$$

$$y = \frac{2x^2 - 6x}{x-6} = 2x + 6 + \frac{36}{x-6}$$

Ponieważ $x, y \in \mathbb{N}$ musi być $(x-6) | 36$ i $x > 8$ a to daje następujące możliwości:

x	9	10	12	15	18	24	42
$\frac{36}{x-6}$	12	9	6	4	3	2	1
y	36	35	36	40	45	56	91

Dodatkowy warunek $\frac{y}{x} \in \mathbb{N}$ spełniony jest tylko w dwóch kolumnach, zatem dzienna norma wynosi 36 elementy.

Zadanie 109

Z punktu A do punktu B wyszedł turysta. 40 minut później w ślad za nim wyszedł następny. Do punktu B przybył najpierw pierwszy z turystów a godzinę i 40 minut po nim, przybył drugi. Ile czasu każdy z turystów potrzebuje na przejście drogi z A do B jeżeli pierwszy porusza się z prędkością 1,5 razy większą od drugiego?

Rozwiązanie

Oznaczmy przez s drogę od A do B, przez v_1, v_2 odpowiednio prędkość pierwszego i drugiego turysty, przy czym $v_1 = \frac{3}{2}v_2$. Pierwszy turysta drogę od A do B pokonał w czasie $\frac{s}{v_1}$, drugi w czasie $\frac{s}{v_2}$, stąd równanie:

$$\frac{s}{v_1} + 1\frac{2}{3} - \frac{2}{3} = \frac{s}{v_2} \Rightarrow \frac{s}{\frac{3}{2}v_2} + 1 = \frac{s}{v_2} \Rightarrow \frac{2s}{3v_2} + 1 = \frac{s}{v_2} \Rightarrow 1 = \frac{3s}{3v_2} - \frac{2s}{3v_2} \Rightarrow \frac{s}{v_2} = 3$$

$$\frac{s}{v_1} = \frac{s}{\frac{3}{2}v_2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{s}{v_2} = \frac{2}{3} \cdot 3 = 2$$

Zadanie 110

Jaki jest stosunek dwóch liczb, których stosunek średniej arytmetycznej do średniej geometrycznej wynosi $a:b$. Jakie założenia należy poczynić o a i b ?

Rozwiązanie

Interesuje nas stosunek $x:y$.

$$\frac{x+y}{2} : \sqrt{xy} = a:b \Rightarrow b \cdot \frac{x+y}{2} = a \cdot \sqrt{xy} \Rightarrow b(x+y) = 2a\sqrt{xy}$$

Dzieląc ostatnie równanie przez y otrzymamy:

$$b\left(\frac{x}{y} + 1\right) = 2a\sqrt{\frac{x}{y}}, \text{ oznaczmy } t = \sqrt{\frac{x}{y}}$$

$$bt^2 + b = 2at \Rightarrow bt^2 - 2at + b = 0, \Delta = 4a^2 - 4b^2$$

$$t_1 = \frac{2a - 2\sqrt{a^2 - b^2}}{2b} = \frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b}, t_2 = \frac{2a + 2\sqrt{a^2 - b^2}}{2b} = \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}$$

Łatwo sprawdzić, że:

$$\frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b} \cdot \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b} = \frac{a^2 - (a^2 - b^2)}{b^2} = 1$$

Zatem liczby te są wzajemnie odwrotne. Wyrażenie ma sens jeżeli $a > b$.

Zadanie 111

Znaleźć cztery liczby tworzące ciąg arytmetyczny i cztery liczby tworzące ciąg geometryczny, które po dodaniu wyrazów o tych samych numerach w obu ciągach dają następujące sumy: 27, 27, 39, 87.

Rozwiązanie

Ciąg arytmetyczny, o którym mowa to: $x, x+r, x+2r, x+3r$. Ciąg geometryczny, to: y, yq, yq^2, yq^3 . Z treści zadania wynika układ:

$$\begin{cases} x+y=27 \\ x+r+yq=27 \\ x+2r+yq^2=39 \\ x+3r+yq^3=87 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r+y(q-1)=0 \\ r+yq(q-1)=12 \\ r+yq^2(q-1)=48 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(q-1)=-r \\ r-qr=12 \\ r-q^2r=48 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r=\frac{12}{1-q} \\ \frac{12}{1-q}(1-q^2)=48 \end{cases}$$

Od drugiego równania odjęto pierwsze, od trzeciego drugie i od czwartego trzecie. Ostatnie równanie upraszczamy:

$$12(1+q)=48 \Rightarrow 1+q=4 \Rightarrow q=3, r=-6$$

Podstawiając do pierwszych dwóch równań otrzymamy:

$$\begin{cases} x + y = 27 \\ x - 6 + 3y = 27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 24 \end{cases}$$

Szukane ciągi to:

$$24, 18, 12, 6 \text{ i } 3, 9, 27, 81$$

Zadanie 112

Rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2z^2 = 2a^2 \\ x + y + 2z = 4(a^2 + 1) \\ z^2 - xy = a^2 \end{cases}$$

Rozwiązanie

Po przekształceniu podnieśmy drugie równanie do kwadratu i dodajmy do niego przecie pomnożone przez 2, po czym odejmijmy od całości równanie pierwsze:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2z^2 + 2a^2 \\ x + y = 4(a^2 + 1) - 2z \\ -xy = a^2 - z^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2z^2 + 2a^2 \\ x^2 + y^2 + 2xy = 16(a^2 + 1)^2 + 4z^2 - 16(a^2 + 1)z \\ -2xy = 2a^2 - 2z^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2z^2 + 2a^2 \\ x^2 + y^2 = 16(a^2 + 1)^2 + 2z^2 + 2a^2 - 16(a^2 + 1)z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 16(a^2 + 1)^2 - 16(a^2 + 1)z \\ z = a^2 + 1 \end{cases}$$

Teraz drugie i trzecie równanie tworzą układ:

$$\begin{cases} x + y = 2(a^2 + 1) \\ xy = a^4 + a^2 + 1 \end{cases} \Rightarrow x[2(a^2 + 1) - x] = a^4 + a^2 + 1 \Rightarrow x^2 - 2(a^2 + 1)x + a^4 + a^2 + 1 = 0$$

$$\Delta = 4(a^2 + 1)^2 - 4(a^4 + a^2 + 1) = 4a^2, \sqrt{\Delta} = 2|a|$$

$$x_1 = \frac{2(a^2 + 1) - 2|a|}{2} = a^2 - |a| + 1, x_2 = \frac{2(a^2 + 1) + 2|a|}{2} = a^2 + |a| + 1$$

$$\begin{cases} x_1 = a^2 - |a| + 1 \\ y_1 = a^2 + |a| + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = a^2 + |a| + 1 \\ y_1 = a^2 - |a| + 1 \end{cases}$$

Zadanie 113

Rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} x + y = a \\ x^5 + y^5 = b^5 \end{cases}$$

Rozwiązanie

Przekształćmy wyrażenie:

$$(x+y)^5 - (x^5 + y^5) = 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 = 5xy(x^3 + 2x^2y + 2xy^2 + y^3) = \\ = 5xy[(x+y)^3 + xy(x+y)]$$

Podstawiając w tym równaniu $xy = t$ otrzymamy równanie kwadratowe względem t :

$$a^5 - b^5 = 5t(a^3 + ta) \Rightarrow 5at^2 + 5a^3t + b^5 - a^5 = 0, \Delta = 25a^6 - 20a(b^5 - a^5) = 45a^6 - 20ab^5$$

$$t_1 = \frac{-5a^3 - \sqrt{45a^6 - 20ab^5}}{10a}, t_2 = \frac{-5a^3 + \sqrt{45a^6 - 20ab^5}}{10a}$$

Nasz układ przyjmie postać:

$$\begin{cases} x+y=a \\ xy=t \end{cases} \Rightarrow x(a-x)=t \Rightarrow x^2-ax+t=0, \Delta=a^2-4t, x_1=\frac{a-\sqrt{a^2-4t}}{2}, x_2=\frac{a+\sqrt{a^2-4t}}{2}$$

Stąd mamy rozwiązania:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{a-\sqrt{a^2-4t}}{2} \\ y_1 = \frac{a+\sqrt{a^2-4t}}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \frac{a+\sqrt{a^2-4t}}{2} \\ y_2 = \frac{a-\sqrt{a^2-4t}}{2} \end{cases}$$

gdzie w miejsce t należy podstawić:

$$t = \frac{-5a^3 \pm \sqrt{45a^6 - 20ab^5}}{10a}$$

Zadanie 114

Rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x^3+y^3+z^3=a^3 \end{cases}$$

Rozwiązanie

Weźmy tożsamość:

$$(x+y+z)^2 - (x^2+y^2+z^2) = 2xy + 2xz + 2yz$$

Podstawiając w tej tożsamości wartości prawych stron równań z układu otrzymamy:

$$xy + xz + yz = 0 \quad (*)$$

Podobnie weźmy tożsamość:

$$(x+y+z)^3 - (x^3 + y^3 + z^3) = 3(x+y)(x+z)(y+z)$$

Podstawiając wartości prawych stron odpowiednich równań otrzymamy:

$$(x+y)(x+z)(y+z) = 0$$

z tej równości wynika, że:

1) $x+y=0 \Rightarrow x=-y$ podstawiając do równania (*) otrzymamy:

$$-y^2 - yz + yz = 0 \Rightarrow y=0, x=0, z=a$$

2) $x+z=0 \Rightarrow x=-z$ podstawiając do równania (*) otrzymamy:

$$-zy - z^2 + yz = 0 \Rightarrow z=0, x=0, y=a$$

3) $y+z=0 \Rightarrow y=-z$ podstawiając do równania (*) otrzymamy:

$$-xz + xz - y^2 = 0 \Rightarrow y=0, z=0, x=a$$

Rozpatrywany układ równań ma trzy rozwiązania: $(0,0,a)$, $(0,a,0)$, $(a,0,0)$.

Zadanie 115

Rozwiązać równanie:

$$\sqrt{a - \sqrt{a+x}} = x \quad (**)$$

Rozwiązanie

Zauważmy, że $x \geq 0$. Podnieśmy równanie dwukrotnie do kwadratu aby pozbyć się pierwiastków:

$$a - \sqrt{a+x} = x^2 \Rightarrow a - x^2 = \sqrt{a+x} \Rightarrow a^2 + x^4 - 2x^2a = a + x$$

Ostatnie równanie jest równaniem kwadratowym względem a , rozwiążmy je:

$$\begin{aligned} a^2 - (2x^2 + 1)a + x^4 - x &= 0 \\ \Delta &= (2x^2 + 1)^2 - 4(x^4 - x) = 4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2 \\ a &= \frac{2x^2 + 1 - 2x - 1}{2} = x^2 - x \vee a = \frac{2x^2 + 1 + 2x + 1}{2} = x^2 + x + 1 \end{aligned}$$

Ponieważ równanie wyjściowe podnoszono dwukrotnie do kwadratu, mogą pojawić się pierwiastki obce i znalezione rozwiązania wymagają sprawdzenia. Podstawiając wartość $a = x^2 - x$ do równania (**) otrzymamy $\sqrt{x^2 - 2x} = x$ co jest możliwe tylko dla $x = 0$ co daje też $a = 0$. Podstawiając wartość $a = x^2 + x + 1$ dla $x \geq 0$ otrzymujemy tożsamość. Rozwiążmy więc równanie: $x^2 + x + 1 - a = 0$

$$\Delta = 4a - 3, x_1 = \frac{-1 - \sqrt{4a - 3}}{2} < 0, x_2 = \frac{-1 + \sqrt{4a - 3}}{2}$$

Pierwsze rozwiązanie odrzucamy jako ujemne, drugie jest dobre dla $-1 + \sqrt{4a - 3} \geq 0$ czyli $a \geq 1$.

Zadanie 116

Statek drogę z A do B pokonuje z prądem rzeki w ciągu 5 godzin. Płynąc z taką samą prędkością ale pod prąd pokonuje tę drogę w ciągu 7 godzin. Jaka długość a portu A do portu B będzie dryfować przedmiot na wodzie?

Rozwiązanie

Oznaczmy przez v_s prędkość statku, przez v_r prędkość prądu rzeki, przez l odległość od A do B, Chcemy znaleźć czas dryfowania czyli $\frac{l}{v_r}$. Z warunków zadania mamy układ równań:

$$\begin{cases} \frac{l}{v_s + v_r} = 5 \\ \frac{l}{v_s - v_r} = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_s + v_r = \frac{l}{5} \\ v_s - v_r = \frac{l}{7} \end{cases} \Rightarrow 2v_r = \frac{l}{5} - \frac{l}{7} \Rightarrow 2v_r = \frac{2l}{35} \Rightarrow \frac{l}{v_r} = 35$$

Zadanie 117

Rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} (x^3 + y^3)(x^2 + y^2) = 2b^5 \\ x + y = b \end{cases} \quad (*)$$

Rozwiązanie

Zauważmy, że podstawiając $xy = t$ możemy dokonać następujących przekształceń:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (x + y)^2 - 2xy = b^2 - 2t \\ x^3 + y^3 &= (x + y)(x^2 - xy + y^2) = b(b^2 - 3t) \end{aligned}$$

Podstawiając te wartości do pierwszego z równań otrzymujemy równanie kwadratowe ze względu na t :

$$\begin{aligned} (b^2 - 2t)b(b^2 - 3t) &= 2b^5 \Rightarrow 6t^2 - 5b^2t - b^4 = 0 \\ \Delta &= 25b^4 + 24b^4 = 49b^4, t_1 = \frac{5b^2 - 7b^2}{12} = -\frac{b^2}{6}, t_2 = \frac{5b^2 + 7b^2}{12} = b^2 \end{aligned}$$

Układ równań (*) możemy teraz zastąpić dwoma prostszymi:

$$\begin{cases} x + y = b \\ xy = -\frac{b^2}{6} \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = b \\ xy = b^2 \end{cases}$$

Pierwszy z układów prowadzi do równania kwadratowego:

$$x(b-x) = -\frac{b^2}{6} \Rightarrow 6x^2 - 6bx - b^2 = 0, \Delta = 36b^2 + 24b^2 = 60b^2$$

$$x_1 = \frac{6b - 2\sqrt{15}b}{12} = \frac{3 - \sqrt{15}}{6}b, x_2 = \frac{6b + 2\sqrt{15}b}{12} = \frac{3 + \sqrt{15}}{6}b$$

$$y_1 = b - \frac{3 - \sqrt{15}}{6}b = \frac{3 + \sqrt{15}}{6}b, y_2 = b - \frac{3 + \sqrt{15}}{6}b = \frac{3 - \sqrt{15}}{6}b$$

Drugi układ prowadzi do równania kwadratowego:

$$x(b-x) = b^2 \Rightarrow x^2 - bx - b^2 = 0, \Delta = b^2 + 4b^2 = 5b^2$$

$$x_1 = \frac{b - \sqrt{5}b}{2} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}b, x_2 = \frac{b + \sqrt{5}b}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}b$$

$$y_1 = b - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}b = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}b, y_2 = b - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}b = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}b$$

Zadanie 118

Rozwiązać równanie w liczbach całkowitych:

$$x + y = x^2 - xy + y^2 \quad (*)$$

Rozwiązanie

(I) Zwróćmy uwagę, że jeżeli para (a, b) rozwiązuje równanie $(*)$ to rozwiązuje je również para (b, a) . Ponadto równanie to można interpretować jak równanie kwadratowe ze względu na zmienną x lub y .

$$x^2 - (y+1)x + y^2 - y = 0 \quad (**)$$

$$\Delta = (y+1)^2 - 4(y^2 - y) = -3y^2 + 6y + 1 \text{ musi być } \Delta \geq 0, \text{ stąd:}$$

$$\Delta_2 = 36 + 12 = 48, y_1 = \frac{-6 - 4\sqrt{3}}{-6} = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}, y_2 = \frac{-6 + 4\sqrt{3}}{-6} = \frac{3 - 2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow y \in \left(\frac{3 - 2\sqrt{3}}{3}, \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3} \right)$$

Ponieważ $y \in \mathbb{Z}$, więc $y \in \{0, 1, 2\}$. Po podstawieniu tych wartości do równania $(**)$ dla $y=0$ otrzymamy:

$$x^2 - x = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 1$$

dla $y=1$ otrzymamy:

$$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 2$$

dla $y=2$ otrzymamy:

$$x^2 - 3x + 2 = 0, \Delta = 9 - 8 = 1, x_1 = \frac{3-1}{2} = 1, x_2 = \frac{3+1}{2} = 2$$

Zatem równanie (*) rozwiązują pary $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,2)$, $(2,1)$, $(2,2)$.

(II) Rozważmy tożsamość:

$$(x-y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2(x^2 - xy + y^2 - x - y) + 2$$

Biorąc pod uwagę równanie (*) dostajemy:

$$(x-y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$$

Suma kwadratów trzech liczb całkowitych równa 2 oznacza, że jedna z liczb równa jest 0, dwie pozostałe równe są 1 lub -1. Rozpatrzmy zatem przypadki:

1. $x-y=0 \Rightarrow x=y \wedge x-1=1$ otrzymamy parę $(2,2)$
2. $x-y=0 \Rightarrow x=y \wedge x-1=-1$ otrzymamy parę $(0,0)$
3. $x-1=0 \Rightarrow x=1 \wedge y-1=-1$ otrzymamy parę $(1,0)$
4. $x-1=0 \Rightarrow x=1 \wedge y-1=1$ otrzymamy parę $(1,2)$
5. $y-1=0 \Rightarrow y=1 \wedge x-1=1$ otrzymamy parę $(2,1)$
6. $y-1=0 \Rightarrow y=1 \wedge x-1=-1$ otrzymamy parę $(0,1)$

Zadanie 119

Rozwiązać układ równań, przeprowadzić dyskusję ilości rozwiązań w zależności od parametru a .

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ (x-a)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Rozwiązanie

Pierwsze z równań przedstawia parę prostych, które przechodzą przez początek układu współrzędnych:

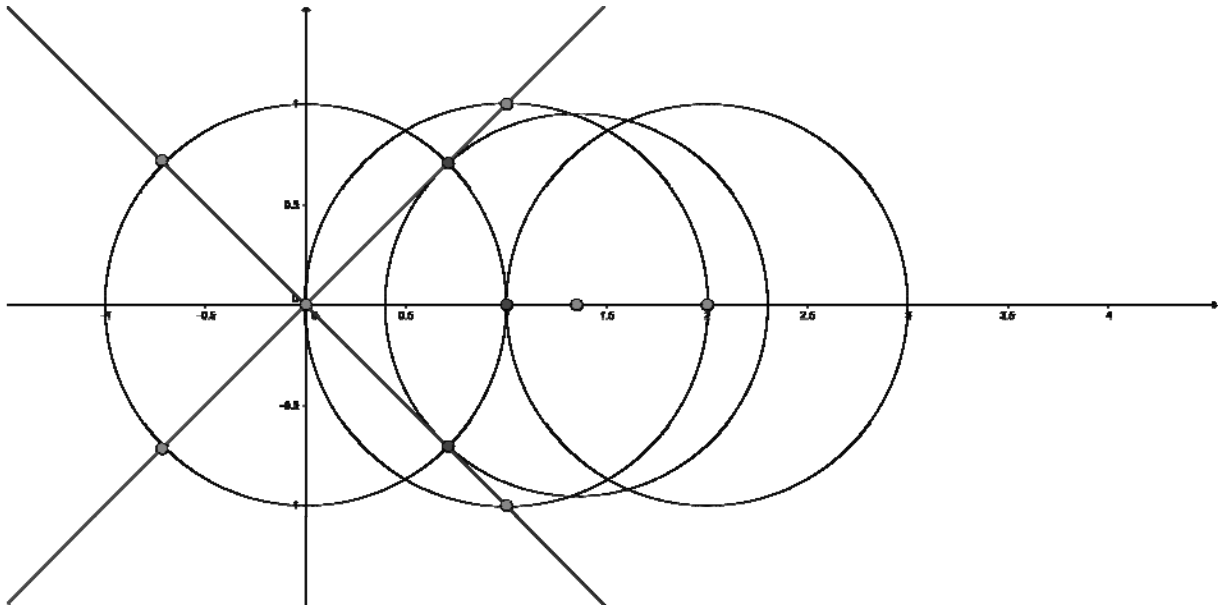
$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) = 0 \Rightarrow x-y=0 \vee x+y=0$$

Drugie równanie przedstawia okrąg o środku w punkcie $(a,0)$ i promieniu 1. Okrąg, o którym mowa, może nie mieć z parą prostych punktów wspólnych (równanie nie ma rozwiązań). Okrąg może być styczny do prostych. Proste i okrąg mają wtedy dwa punkty wspólne (układ ma dwa rozwiązania). Okrąg może przechodzić przez początek układu, przecina wtedy każdą z prostych w dodatkowym punkcie. Proste i okrąg mają trzy punkty wspólne (układ ma trzy rozwiązania). Okrąg może mieć z prostymi cztery punkty wspólne.

Pierwsze równanie daje $x^2 = y^2$. Podstawiając do drugiego równania otrzymamy:

$$\begin{aligned} (x-a)^2 + x^2 = 1 &\Rightarrow 2x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0 \\ \Delta = 4a^2 - 8a^2 + 8 &= 8 - 4a^2 \end{aligned}$$

Badając deltę ustalimy ilość rozwiązań układu równań. Rozpatrzmy odpowiednie przypadki.



1. $\Delta < 0$ brak rozwiązań:

$$8 - 4a^2 < 0 \Rightarrow (\sqrt{2} - a)(\sqrt{2} + a) < 0 \Rightarrow a \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$$

2. $\Delta = 0$ jedno rozwiązanie, jedna wartość x , dwie wartości y , dwa punkty wspólne:

$$8 - 4a^2 = 0 \Rightarrow (\sqrt{2} - a)(\sqrt{2} + a) = 0 \Rightarrow a = -\sqrt{2} \vee a = \sqrt{2}$$

Dla $a = -\sqrt{2}$ mamy:

$$2x^2 + 2\sqrt{2}x + 1 = 0 \Rightarrow (\sqrt{2}x + 1)^2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \vee y = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Dwa punkty wspólne: $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Dla $a = \sqrt{2}$ mamy:

$$2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0 \Rightarrow (\sqrt{2}x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}, y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \vee y = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Dwa punkty wspólne: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

3. $\Delta > 0$ dwie wartości x , cztery wartości y , przypadek szczególny - dla $x = 0$ mamy też $y = 0$ i trzy punkty wspólne:

$$8 - 4a^2 > 0 \Rightarrow (\sqrt{2} - a)(\sqrt{2} + a) > 0 \Rightarrow a \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

$$x_1 = \frac{2a - 2\sqrt{2 - a^2}}{4} = \frac{a - \sqrt{2 - a^2}}{2}, x_2 = \frac{2a + 2\sqrt{2 - a^2}}{4} = \frac{a + \sqrt{2 - a^2}}{2}$$

Najpierw zbadamy przypadek szczególny $x = 0$ oznacza:

$$\frac{a \pm \sqrt{2-a^2}}{2} = 0 \Rightarrow a = 1 \vee a = -1$$

Dla $a = 1$ mamy $2x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 1$ co daje trzy punkty wspólne: $(0,0)$, $(1,1)$, $(1, -1)$.

Dla $a = -1$ mamy $2x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = -1$ co również daje trzy punkty wspólne: $(0,0)$, $(-1,1)$, $(-1, -1)$.

Dla $a \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \setminus \{-1, 1\}$ mamy cztery punkty

$$\left(\frac{a - \sqrt{2-a^2}}{2}, -\frac{a - \sqrt{2-a^2}}{2} \right), \left(\frac{a - \sqrt{2-a^2}}{2}, \frac{a - \sqrt{2-a^2}}{2} \right),$$

$$\left(\frac{a + \sqrt{2-a^2}}{2}, -\frac{a + \sqrt{2-a^2}}{2} \right), \left(\frac{a + \sqrt{2-a^2}}{2}, \frac{a + \sqrt{2-a^2}}{2} \right)$$

Zadanie 120

Rozwiązać w liczbach całkowitych równanie:

$$xy + 3x - 5y = -3 \quad (*)$$

Rozwiązanie

Aby rozwiązać równanie w liczbach całkowitych wygodnie jest stronę ze zmiennymi przestawić jako iloczyn: $(x+a)(y+b) = xy + bx + ay + ab$. Porównując z równaniem $(*)$ dobieramy współczynniki a, b : $(x-5)(y+3) = xy + 3x - 5y - 15$. Stąd otrzymujemy:

$$(x-5)(y+3) = -18$$

Liczba $18 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$ stąd tabela możliwych wartości:

$x-5$	9	-9	2	-2	3	-3	6	-6	18	-18	1	-1
$y+3$	-2	2	-9	9	-6	6	-3	3	-1	1	-18	18
x	14	-4	7	3	8	2	11	-1	23	-13	6	4
y	-5	-1	-12	6	-9	3	-6	0	-4	-2	-21	15

Zadanie 121

Znaleźć liczbę, która przy dzieleniu przez 133 daje resztę 22, przydzieleniu przez 132 daje resztę 37.

Rozwiązanie

Z warunków zadania otrzymujemy równanie $n \cdot 133 + 22 = k \cdot 132 + 37$, które przekształcamy w następujący sposób:

$$n \cdot 133 - k \cdot 132 = 15$$

$$n(132 + 1) - k \cdot 132 = 15$$

$$(n - k)132 + n = 15$$

Ponieważ $n, k \in \mathbb{N}$, ostatnia równość jest możliwa przy $n = k = 15$. Co daje liczbę $15 \cdot 133 + 22 = 2017$.

Zadanie 122

Rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 3 \\ x_4 + x_5 + x_6 = -1 \\ x_5 + x_6 + x_7 = -2 \\ x_6 + x_7 + x_8 = -3 \\ x_7 + x_8 + x_1 = 4 \\ x_8 + x_1 + x_2 = -4 \end{cases}$$

Rozwiązanie

Zauważmy, że dodając równania stronami otrzymamy:

$$3(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8) = 0$$

Dodając równania I, IV i VII otrzymamy: $x_1 = 4$

Dodając równania II, V i VIII otrzymamy: $x_2 = -4$

Dodając równania III, VI i I otrzymamy: $x_3 = 1$

Dodając równania IV, VII i II otrzymamy: $x_4 = 5$

Dodając równania V, VIII i III otrzymamy: $x_5 = -3$

Dodając równania VI, I i IV otrzymamy: $x_6 = -3$

Dodając równania VII, II i V otrzymamy: $x_7 = 4$

Dodając równania VIII, III i VI otrzymamy: $x_8 = -4$

Zadanie 123

Rozwiązać w liczbach naturalnych równanie:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$$

Rozwiązanie

Możemy przyjąć, że $x \leq y \leq z$. Jeżeli $x \geq 4$ to: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{3}{4} < 1$ - otrzymaliśmy

sprzeczność. Jeżeli $x = 1$, to $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$ - otrzymaliśmy sprzeczność. Zatem $x \in \{2, 3\}$.

1. Przypadek $x = 2$.

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$$

Jeżeli $y > 4$, to $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} < \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ - sprzeczność, zatem $y \in \{3, 4\}$.

Dla $y = 3$ wyliczamy $z = 6$. Dla $y = 4$ wyliczamy $z = 2$. Stąd mamy trójki $(2, 3, 6)$ oraz $(2, 4, 2)$.

2. Przypadek $x = 3$.

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{3}$$

Jeżeli $y > 3$, to $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} < \frac{2}{3}$ - sprzeczność, zatem $y = 3$ więc i $z = 3$.

Wszystkie rozwiązania będą permutacją znalezionych rozwiązań i są to trójki: $(2, 3, 6)$, $(3, 2, 6)$, $(3, 6, 2)$, $(6, 3, 2)$, $(6, 2, 3)$, $(2, 6, 3)$, $(4, 2, 2)$, $(2, 4, 2)$, $(2, 2, 4)$, $(3, 3, 3)$.

Zadanie 124

Rozwiązać w liczbach całkowitych równanie¹⁴:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz \quad (*)$$

Rozwiązanie

Prawa strona równania jest parzysta wobec tego suma kwadratów po lewej stronie także musi być parzysta. Wynika stąd, że albo każda z liczb x, y, z jest parzysta albo dwie z nich są nieparzyste. Gdyby dwie były nieparzyste np. $y = 2n - 1$, $z = 2k - 1$ a jedna parzysta, to podstawiając do równania $(*)$ otrzymamy:

$$\begin{aligned} (2m)^2 + (2n-1)^2 + (2k-1)^2 &= 2 \cdot 2m(2n-1)(2k-1) \\ 4(m^2 + n^2 - n + k^2 - k) + 2 &= 4m(2n-1)(2k-1) \end{aligned}$$

Co jest sprzeczne bo lewa strona nie dzieli się przez 4 a prawa dzieli. Zatem każda z liczb x, y, z musi być parzysta, to jest dzielić się przez 2. Ponownie podstawiając wyłącznie parzyste wartości otrzymamy:

$$(2m)^2 + (2n)^2 + (2k)^2 = 2 \cdot 2m \cdot 2n \cdot 2k \Rightarrow m^2 + n^2 + k^2 = 4mnk$$

Ostatnia równość pokazuje, że m, n, k także są parzyste, dzielą się przez 2 czyli x, y, z dzielą się przez 2^2 . Powtarzając rozumowanie ustalamy, że x, y, z dzielą się przez 2^n dla każdego n . To jest możliwe tylko dla $x = 0, y = 0, z = 0$.

¹⁴ Równanie można uogólnić na większą liczbę zmiennych. Identyczny dowód pokazuje, że jedynym rozwiązaniem są wartości równe 0.

Zadanie 125

Rozwiązać równanie:

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1 \quad (*)$$

Rozwiązanie

Zauważmy, że:

$$x+3-4\sqrt{x-1} = (\sqrt{x-1}-2)^2, \quad x+8-6\sqrt{x-1} = (\sqrt{x-1}-3)^2$$

stąd równanie (*) przyjmuje postać:

$$|\sqrt{x-1}-2| + |\sqrt{x-1}-3| = 1$$

Oczywiście $x \in \langle 1, +\infty \rangle$, podstawiając $\sqrt{x-1} = t$ gdzie $t \geq 0$ otrzymujemy proste równanie:

$$|t-2| + |t-3| = 1$$

które rozpatrujemy w trzech przedziałach:

1. $t \in \langle 0, 2 \rangle$

$$-t+2-t+3=1 \Rightarrow t=2 \notin \langle 0, 2 \rangle$$

2. $t \in \langle 2, 3 \rangle$

$$t-2-t+3=1 \Rightarrow 1=1 \Rightarrow t \in \langle 2, 3 \rangle$$

3. $t \in \langle 3, +\infty \rangle$

$$t-2+t-3=1 \Rightarrow t=3 \in \langle 3, +\infty \rangle$$

Zatem $t \in \langle 2, 3 \rangle$

$$\sqrt{x-1} = t \Rightarrow x = t^2 + 1 \Rightarrow x \in \langle 5, 10 \rangle$$

Zadanie 126

Jacek i Placek chcą z miejscowości A dostać się do miejscowości B oddalonej o 25 km. Idąc pieszo mogą poruszać się z prędkością 5 km/h, jadąc rowerem mogą poruszać się z prędkością 25 km/h. Jacek z A wyruszył pieszo i w tym samym czasie Placek z A wyruszył na rowerze. Po pewnym czasie Placek spotkał Pawła idącego z B do A. Przekazał mu rower i dalej poszedł pieszo. Paweł pojechał w kierunku A i po drodze spotkał Jacka, przekazał mu rower, którym ten dojechał do B. Kiedy z miejscowości B powinie wyjść Paweł aby Jacek i Placek dotarli do B jednocześnie?

Rozwiązanie

Żeby razem dotrzeć do miejscowości B Jacek i Placek muszą przejść jednakową drogę x i przejechać jednakową drogę $20-x$. Kiedy Placek pokonał drogę $20-x$ spotkał Pawła, który również przeszedł drogę x (ponieważ taka droga pozostała Plackowi). Do spotkania z Jackiem Paweł przejedzie na rowerze $20-2x$ (ponieważ Jacek i Placek przeszli łącznie $2x$). Po spotkaniu Jacek przejedzie swoje $20-x$. W czasie jazdy Pawła i Jacka Placek pokona brakującą drogę x piechotą. Stąd równanie:

$$\frac{(20-2x)+(20-x)}{25} = \frac{x}{5} \Rightarrow \frac{40-3x}{25} = \frac{x}{5} \Rightarrow x=5$$

Co oznacza, że Placek do spotkania z Pawłem przejechał 15 km co mu zajęło:

$\frac{15}{25} = \frac{3}{5}$ godziny. Paweł przeszedł 5 km co mu zajęło godzinę. Stąd wynika, że Paweł powinien wyjść z miejscowości B 24 minuty wcześniej ($1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$ godziny) niż Jacek i Placek wyruszyli z miejscowości A.

Zadanie 127

Rozwiązać równanie:

$$x = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots}}} \quad (*)$$

Rozwiązanie

Zauważmy, że równanie (*) równoważne jest równaniu:

$$x = \sqrt{x+x} \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x=0 \vee x=2$$

Ten wynik można także uzyskać przez bezpośredni rachunek:

$$2 = \sqrt{4} = \sqrt{2+2} = \sqrt{2+\sqrt{4}} = \sqrt{2+\sqrt{2+2}} = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{4}}} = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\dots}}}$$

Można rozkład liczby na składniki rozpocząć od składnika 1:

$$\begin{aligned} 2 &= \sqrt{4} = \sqrt{1+3} = \sqrt{1+1\sqrt{9}} = \sqrt{1+1\sqrt{1+8}} = \sqrt{1+1\sqrt{1+2\sqrt{16}}} = \sqrt{1+1\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{25}}}} = \\ &= \sqrt{1+1\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{36}}}}} = \sqrt{1+1\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{1+\dots}}}}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 &= \sqrt{9} = \sqrt{1+8} = \sqrt{1+2\sqrt{16}} = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{25}}} = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{36}}}} = \\ &= \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{47}}}}} = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{1+\dots}}}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4 &= \sqrt{16} = \sqrt{1+15} = \sqrt{1+3\sqrt{25}} = \sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{36}}} = \sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{49}}}} = \\ &= \sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{1+6\sqrt{64}}}}} = \sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{1+6\sqrt{1+\dots}}}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5 &= \sqrt{25} = \sqrt{1+24} = \sqrt{1+4\sqrt{36}} = \sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{49}}} = \sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{1+6\sqrt{64}}}} = \\ &= \sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{1+6\sqrt{1+7\sqrt{81}}}}} = \sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{1+6\sqrt{1+7\sqrt{1+\dots}}}}} \end{aligned}$$

Łatwo pokazać, że ogólnie:

$$\begin{aligned} n &= \sqrt{n^2} = \sqrt{1 + (n^2 - 1)} = \sqrt{1 + (n-1)\sqrt{(n+1)^2}} = \sqrt{1 + (n-1)\sqrt{1 + (n^2 + 2n)}} = \\ &= \sqrt{1 + (n-1)\sqrt{1 + n\sqrt{(n+2)^2}}} = \sqrt{1 + (n-1)\sqrt{1 + n\sqrt{1 + (n^2 + 4n + 3)}}} = \\ &= \sqrt{1 + (n-1)\sqrt{1 + n\sqrt{1 + (n+1)\sqrt{(n+3)^2}}}} = \sqrt{1 + (n-1)\sqrt{1 + n\sqrt{1 + (n+1)\sqrt{1 + (n+2)\sqrt{1 + \dots}}}}} \end{aligned}$$

Zadanie 128

Znaleźć całkowite wartości pierwiastka i odpowiadające im n dla $n \leq 100$.

$$\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + \dots}}}$$

Rozwiązanie

Stosujemy metodę podobną do zastosowanej w zadaniu poprzednim. Oznaczamy wartość pierwiastka przez x i rozwiązujemy równanie:

$$\begin{aligned} \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + \dots}}} &= x \Rightarrow x = \sqrt{n + x} \Rightarrow x^2 - x - n = 0 \\ \Delta &= 1 + 4n, x_1 = \frac{1 - \sqrt{4n + 1}}{2} < 0, x_2 = \frac{1 + \sqrt{4n + 1}}{2} \end{aligned}$$

Pierwsze rozwiązanie odrzucamy. Pozostaje x_2 , ustalamy dla jakiego n otrzymamy liczbę całkowitą spełniającą tą formułę. Maksymalna wartość x jest mniejsza, równa $\left\lfloor \frac{1 + \sqrt{401}}{2} \right\rfloor = 10$, minimalny równa 2.

$$\frac{1 + \sqrt{4n + 1}}{2} = x \Rightarrow 4n + 1 = (2x - 1)^2$$

Zróbmy tabelkę kwadratów liczb nieparzystych mniejszych od 20:

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$(2x-1)^2$	9	25	49	81	121	169	225	289	361
n	2	6	12	20	30	42	56	72	90

Zadanie 129

Rozwiązać w liczbach naturalnych równanie:

$$1 - \frac{x}{1!} + \frac{x(x-1)}{2!} - \frac{x(x-1)(x-2)}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!} = 0 (*)$$

Rozwiązanie

Zwróćmy uwagę, że podstawiając w miejsce x liczbę naturalną k zerujemy wszystkie składniki dla $n > k$ i otrzymujemy:

$$1 - \frac{k}{1!} + \frac{k(k-1)}{2!} - \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} + \dots + (-1)^k \frac{k(k-1)\dots 2 \cdot 1}{k!} = 0 \quad (**)$$

Równanie po lewej stronie (**) jest rozwinięciem dwumianu Newtona:

$$1 - \frac{k}{1!} + \frac{k(k-1)}{2!} - \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} + \dots + (-1)^k \frac{k(k-1)\dots 2 \cdot 1}{k!} = (1-1)^k = 0$$

Zatem każda liczba naturalna $1 \dots k$ jest pierwiastkiem równania, więc każda liczba naturalna $k \leq n$ jest pierwiastkiem równania (*).